

Управление образования Администрации города Усть-Илимска
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа № 8 имени Бусыгина М.И.»

Авторская разработка:
Задачи на готовых чертежах,
как средство достижения
понимания в обучении геометрии

Разработала: учитель математики
МБОУ «СОШ №8 имени Бусыгина М.И.»
Смирнова Инна Владиславна

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. РОЛЬ И МЕСТО ЗАДАЧ В МАТЕМАТИКЕ	5
1.1. Функции задач.....	9
1.2. Проблемы понимания.	13
1.3. Задачи, как средство достижения понимания.	16
1.4. Проблемы изучения стереометрии.	18
2. ЗАДАЧИ НА ГОТОВЫХ ЧЕРТЕЖАХ.....	21
2.1. Задачи на готовых чертежах.....	21
2.2. Требования к чертежам.....	37
2.2. Типология задач на готовых чертежах	43
2.3. Структура процесса решения задач на готовых чертежах	61
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	74
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	75
ПРИЛОЖЕНИЕ 1.....	81
ПРИЛОЖЕНИЕ 2.....	92
ПРИЛОЖЕНИЕ 3.....	105

Введение.

Проблеме понимания обучения математике посвящено много работ. В связи с тем, что в различной литературе приводятся различные трактовки определения понятия «понимание», определимся с трактовкой. В данной работе понимание будем рассматривать с позиции осмысления человеком предъявляемой ему в ходе учебного процесса или самостоятельно «добываемой» им информации об изучаемом материале.

Понимание - процесс поиска и добывания (раскрытия) смысла того или иного содержания, в результате которого выявляются и устанавливаются различные взаимосвязи между компонентами знаний.

Для понимания человеком той или иной информации, ему приходится осуществлять ряд предметных и мыслительных действий:

- декодирование информации;
- перекодирование информации;
- интерпретирование и т.д.

Средством для обеспечения формирования указанных выше компонентов являются математические задачи.

Из анализа литературы известно, что математические задачи могут выступать и как средство достижения понимания, и как его критерии. Почти любая задача, с одной стороны, позволяет выявить степень понимания школьниками учебного материала, с другой - способствует его формированию.

Выделены особенности математических задач, которые делают их ведущим средством реализации поставленной цели; создания условий для достижения школьниками понимания содержания школьной математики:

- установление внутрипредметных связей;
- перевод задачи с одного языка на другой;
- переформулирование условия и требования задачи;
- трансформирование знаний в практическую направленность.

Проблема нашего исследования – поиск средств достижения понимания в геометрии.

Гипотеза – задачи на готовых чертежах могут способствовать достижению понимания учащимися геометрического материала.

Объект исследования – деятельность учителя, направленная на обеспечение понимания учащимися материала.

Предмет исследования – задачи на готовых чертежах, как одно из возможных средств создания условий достижения понимания учащимися материала.

При изучении литературы, посвященной задачам на готовых чертежах, мы столкнулись с тем, что данному понятию не дается определение. В соответствии с этим, ставилась первая задача: определить термин «задача на готовом чертеже».

Вторая задача: показать, что использование задач на готовых чертежах способствует развитию понимающего усвоения учащимися материала.

Третья задача: представить типологию задач на готовых чертежах по разным основаниям.

Четвертая задача: выделить структуру процесса решения задач на готовых чертежах.

При решении задачи на готовом чертеже нужно обратить внимание на этап анализа чертежа (чтению чертежа), для этого планируется разработать электронное пособие по обучению чтению чертежей.

1. Роль и место задач в математике

Как сказано Ю.М. Колягиным, Г.Л. Луканкиным и т.д. [28], глубокое и прочное усвоение школьниками основ курса математики чрезвычайно важно для формирования их математической культуры. Авторы утверждают, что наряду с глубоким и прочным усвоением основ математики выпускник средней школы должен проявлять умение изучать математику самостоятельно и творчески, обладать способностью мобилизовать все свои знания, умственные, нравственные и другие качества для успешной трудовой деятельности независимо от того, какой профессией он овладеет в дальнейшем. Тем самым будут созданы необходимые предпосылки к активному применению математических знаний там, где это необходимо. Поэтому в опыте работы передовых учителей эффективность обучения математике (да и вообще любому учебному предмету) проявляется, прежде всего, в том, что основной акцент ставится не на запоминание школьниками учебной информации, а на ее глубокое понимание, сознательное и активное усвоение, на формирование у школьников умения творчески применять эту информацию в рамках учебной практики.

Важнейшим средством формирования у школьников высокой математической культуры, мощным средством активизации обучения математике являются эффективная организация и управление учебной деятельностью школьников в процессе решения различных математических задач.

К мнению Ю.М. Колягина присоединяется Д.С. Зейналов [24], который считает, что именно при решении математических задач школьники сознательно и прочно овладевают знаниями, умениями и навыками, в школьном курсе математики. Более того, в процессе решения математических задач у школьников, самым естественным образом, могут быть сформированы качества, присущие творческой личности.

Г.И. Саранцев [50] выделяет следующие этапы истории использования задач в обучении математике:

- 1) изучение математики с целью обучения решению задач;
- 2) обучение математике, сопровождаемое решением задач;
- 3) обучение математике через решение задачи.

Сущность этих этапов Г.И. Саранцев [50] обуславливает целями обучения, новыми образовательными концепциями, целями математического образования.

Автор утверждает, что особенности первого этапа хорошо вычитываются из предисловия к «Арифметике» Л.Ф. Магницкого, где утверждается, что математику следует «вытверживать» для решения задач, главным образом задач на банковские расчеты, купеческие сделки и т.п. [50].

Содержание второго этапа Г.И. Саранцев [50] обуславливает, прежде всего, представлением о методике обучения математике, заключающимся в том, что предметные методики должны заниматься поиском средств, приемов усвоения теоретического материала. Еще сейчас можно встретить уроки математики с жесткой структурой: проверка домашнего задания, опрос, объяснение нового материала, закрепление (решение задач), задание на дом. Однако еще в конце XIX в. Высказывались пожелания расширить функции задач в обучении математике. Так, С.И. Шохор – Троцкий в статье «Цель и средства преподавания низшей математики с точки зрения требований общего образования», опубликованной в 1892 г., отмечая, что задачи должны служить точкой исхода преподавания, а не средством дрессировки учащихся в определенном направлении.

Однако в учебных пособиях по методике обучения математике роль и место задач в обучении несколько занижены. Например, в книге «Педагогика математики» А.А. Столяра, обучение через задачи представлено схемой «задачи – теория – задачи», из которой ясно, что задачи рассматриваются автором как источник возникновения теории и средство ее применения.

Из разделов, посвященных проблеме формирования понятий, методике работы с теоремой, можно сделать вывод, что задачи играют большую роль в изучении теории. Эту идею подтверждает Г.И. Саранцев в литературе [50],

где задачи (упражнения) при формировании понятий призваны: способствовать мотивации введения понятия; выявлять существенные свойства понятия; способствовать их усвоению; способствовать усвоению терминологии, символики, пониманию смысла каждого слова в определении, запоминанию определения, овладению объектом понятия; раскрывать взаимосвязи понятия с другими понятиями; обучать применению понятия. Выполнение упражнений должно обеспечить овладение умениями распознавать объекты, принадлежащие понятию, выводить следствия из принадлежности объекта понятию, приходить от определения понятия его признакам, переосмыслить объекты с точки зрения других понятий. Введение понятия осуществляется в процессе решения задач практического, физического и другого содержания. Ознакомление со многими геометрическими понятиями возможно в процессе решения задач на построение фигур удовлетворяет указанным свойствам, упражнений с моделями фигур. Усвоение определения понятия достигается при решении задач на распознавание, на выведение следствий, задач, требующих анализа условий, дополнения их так, чтобы из условий вытекала принадлежность объекта понятию. Систематизация понятий осуществляется в процессе решения задач на установление связей между понятиями, построение схем, устанавливающие связи, на составление «родословных» понятий и т.д.

Задачи, используемые для реализации различных этапов организации изучения теоремы, должны способствовать мотивации введения теоремы; выявлять закономерности, отраженные в теореме; способствовать усвоению содержания теоремы; способствовать пониманию значения каждого слова в формулировке теоремы, заполнению ее формулировки; обеспечивать восприятие идеи доказательства, раскрывать приемы доказательства; обучать применению теоремы; раскрывать взаимосвязи изучаемой теоремы с другими теоремами.

Г.И. Саранцев [50] утверждает, что усвоению содержания теорем способствует решение задач на выделение на чертежах и моделях фигур, удовлетворяющих условию теоремы, а также выполнение чертежа, моделирую-

щего условие. Восприятие доказательства теоремы обеспечивают задачи на ознакомление со способом ее доказательства, моделирующие приемы доказательства.

Задачи эффективны в воспитании потребности в обосновании утверждений, в воспитании навыков дедуктивного мышления, в привитии взгляда на то, что справедливость утверждений выясняется рассуждением. На этапе применения теоремы важны задачи на систематизацию знаний и их обобщение, на применение знаний и умений в комплексе, на углубление и расширение знаний и умений, на составление «родословной» доказательства теоремы, на группирование теорем по приемам из доказательства. С помощью задач формируются умения, составляющие основу применения знаний в конкретных ситуациях (переформулировка требования задач, составление промежуточных задач и т.д.).

Исходя из мнения Г.И. Саранцева [50], Д.С. Зейналова [24], Ю.М. Колягина, Г.Л. Луканкина и т.д. [28], О.И. Плакатиной [32], можно сказать, что действительно задачи играют большую роль и занимают далеко не последнее место в изучении математики. В самом деле, по выражению О.И. Плакатиной [31], роль и место задач в обучении математике методикой ее преподавания рассматриваются достаточно давно, при этом еще в середине прошлого века (XX) многие выдающиеся отечественные ученые, как математики, так и специалисты в области методики преподавания математики, именно в математических задачах видели основное средство преодоления формализма в знаниях учащихся.

1.1. Функции задач

Практика обучения математике Ю.М. Колягина, В.А. Оганесяна и т.д. [28] показывает, что любая конкретная задача, которая ставится и решается на том или ином этапе обучения, несет в себе самые разнообразные функции, которые в данных конкретных условиях (определяемых либо учеником, либо учителем, либо конкретными условиями обучения) проступают явно или скрытно. Поэтому в конкретном плане имеет смысл говорить о ведущей функции, которую реализует данная учебная задача.

По выражению Ю.М. Колягина [28], ведущее положение одной или нескольких функций учебной задачи имеет динамичный характер. В зависимости от конкретных условий обучения та или иная «скрытая» функция задачи может выступить явно, а ведущая функция – оказаться нереализованной. Поэтому очень важно, чтобы учитель выявлял основные функции каждой задачи, помещенной в учебнике. Опыт Г.И. Саранцева [50] показывает, что творчески работающий человек видит «гораздо дальше» авторов учебника (и это очень хорошо), вскрывая и реализуя в ходе решения той или иной задачи более глубокие педагогические полезные функции, чем те, которые ей предписаны методическим руководством к учебнику.

Как говорит Ю.М. Колягина [28], являясь одним из важнейших средств обучения математике (в широком его понимании), система школьных математических задач должна отвечать главным целям школьного математического образования. Каждая отдельная задача или серия задач должна быть направлена на реализацию той или иной конкретной цели (или целей) обучения (понимаемого опять-таки в широком смысле).

Геометрические задачи и их решения обладают определенной спецификой.

Специфика задач школьного курса геометрии проявляется, прежде всего, в более узкой (по сравнению с алгебраическими задачами) их направленности: большинство геометрических задач – это задачи на изучение определенных точечных множеств (фигур), операций, отношений между ними и их

свойств. Существенно большую роль в ходе решения геометрических задач играют наглядные иллюстрации, чертежи, рисунки, модели. Однако с дидактической точки зрения в процессе решения геометрических задач заложены большие (по сравнению с решением алгебраических задач) возможности развития мышления школьников. Решение геометрических задач существенно и позитивно влияет на развитие логического мышления учащихся, их пространственного воображения и т. д. В значительно меньшей степени при решении геометрических задач может быть использован образец решения некоторого класса задач, а тем самым осуществляется дестандартизация как самих задач, так и методики их использования в обучении.

В современном обучении геометрии сохранились традиционные виды задач – задачи на построение, вычисление, доказательство. Таковы, например, задачи на способы задания точечных множеств; задачи, связанные с выполнением операций над геометрическими фигурами; задачи на отображения точечных множеств и их применение; задачи, в ходе решения которых широко применяется язык и символика теории множеств, и ряд других задач.

Изменилась методическая направленность использования задач в обучении. К оправдавшим себя на практике видам геометрических задач (устные задачи, задачи по готовым рисункам, задачи на измерение с последующим вычислением и др.) новые.

По выражению Ю.М. Колягина [28], должно уделяться внимание на усиление практической направленности геометрических задач, которая выражается, прежде всего, в построении математических моделей конкретной ситуации, в использовании метода графического решения задач (нахождение неизвестных элементов фигуры проводится через построение на чертеже, выполненном в выбранном масштабе, с последующим измерением), в применении алгебраического метода решения геометрических задач. Таким образом, основной акцент при решении геометрических задач ставится теперь на более глубокое и прочное усвоение основного учебного материала, а в ходе

его изучения – на целенаправленное развитие мышления учащихся, на формирование у них диалектико-материалистического мировоззрения.

5. Для повышения эффективности развивающего обучения геометрии перед учащимися следует систематически ставить серии задач (или отдельные задачи), которые наряду с конкретными обучающими функциями несли бы в себе (также в качестве ведущих) функции, направленные на формирование у школьников элементов математического мышления.

В качестве таких задач могут выступать, например, задачи, при постановке которых:

учащимся мотивируется целесообразность изучения нового материала, разумность определений геометрических понятий, полезность изучения тех или иных теорем;

учащиеся побуждаются к самостоятельному открытию того или иного геометрического факта, к обоснованию того или иного положения, к установлению возможности применения уже усвоенных ими знаний в новой для них ситуации;

учащиеся подводятся к самостоятельному открытию методов доказательства теорем, общих приемов геометрических задач, к установлению новых связей между известными им геометрическими понятиями;

у учащихся формируются умения использовать ведущие методы научного познания (опыт, наблюдение, сравнение, анализ, обобщение и т. д.) как методы самостоятельного изучения геометрии, понимание роли и места индукции, аналогии дедукции в процессе познания;

учащиеся обнаруживают взаимосвязь геометрии и алгебры с другими предметами, устанавливают содержательные и структурные связи между различными вопросами самого курса геометрии, получают возможность применить математические знания к решению нематематических задач;

учащиеся приобщаются к самостоятельным поисковым исследованиям (посредством изучения результатов решения задач, изменения условия задачи, возможных обобщений задачи, отыскания других способов ее решения и

отбора того из них, который наиболее полно удовлетворяет заданным условиям, и т.п.);

у учащихся формируются качества, присущие научному мышлению (активность, гибкость, глубина, критичность, доказательность и т. п.), умение выражать свою мысль ясно и точно и т. д.

Практическая возможность использования вышеуказанных рекомендаций Ю.М. Колягина, Г.И. Саранцева, обусловлена возможностью использовать для этой цели задачи, помещенные в учебниках.

1.2. Проблемы понимания.

По выражению Демьянкова В.З. [15], проблема понимания исследуется различными науками и имеет древнюю историю. Сегодня она имеет не только теоретический, но и практический интерес. Но, как говорит О.И. Плакатина [31], вплоть до последнего времени вообще не ставился вопрос о том, что такое понимание математики. Лишь в последнее время в работах Е.И. Лященко и ее учеников В.В. Крылова, Е.В. Пономаревой и др. были поставлены вопросы, связанные с трактовкой рассматриваемого понятия, так и с раскрытием путей и средств создания условий, благоприятных для достижения учащимися понимания математики. В работах Росинской В.В. [47], Кислюк А.В. [22], Солодуха Е.В [53] приводятся различные трактовки понятия «понимание». Анализ трактовок позволяет выделить группы трактовок, в которых:

- понимание рассматривается как некий процесс;
- понимание как результат данного процесса;
- понимание как способность человека к осознанию значения материала.

Исходя из анализа трактовок в работах Росинской В.В. [47], О.И. Плакатиной [31], можно сказать, что некоторые трактовки даны через понятия «смысл», «значение» и, по их мнению, эти понятия связаны между собой.

О.И. Плакатина [31] приводит следующие трактовки:

Значение – содержание, объективно заложенное в изучаемом материале, представленной информации, языковом выражении и т.п.

Смысл – содержание, которое устанавливается субъектом в процессе понимания этого содержания.

В данной работе мы решили определиться с трактовкой понятия «понимание» и выбрали следующую:

Понимание – процесс поиска и добывания (раскрытия) смысла того или иного содержания, в результате которого выявляются и устанавливаются различные взаимосвязи между компонентами знаний [33].

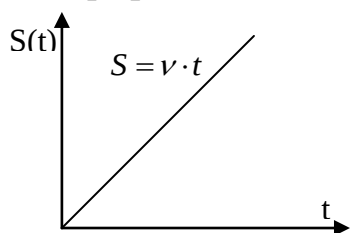
По мнению О.И. Плакатиной [31] в ходе уяснения смысла и значения представленной информации человеку приходится осуществлять ряд предметных и мыслительных действий: декодирование и перекодирование информации, интерпретирование информации, объяснение иллюстрация и т.п. Отсюда следует, что ученик должен владеть соответствующими учебными действиями, умениями устанавливать связи в содержании.

Уделим внимание мыслительной операции перекодировке, которая является основой выполнения процедуры интерпретации.

Е.В. Пономарева [38] определила операцию перекодировки как обратимые межъязыковые переводы с графического языка на символичный, с символического языка на словесный и переформулирование текста внутри одного языка. Как сказано в пособии [33], задание на перекодирование информации направлено на исследование понимания учащимися того, что одна и та же информация может быть представлена в различных формах. В тексте задания информация предъявляется в одной из пяти форм (образной, вербальной, графической, знаковой, символической). Учащийся должен перекодировать ее в заданную форму. В пособии [33] приводится пример из математики:

В вербальной: Тело движется прямолинейно с постоянной скоростью v .

В графической:



В символической: $S = v \cdot t$

Стадии трансформации чувственно воспринимаемых образов постепенно усложняющиеся модели, выражаемые на разных искусственных языках. Если ученик не усвоил эти языки, то это разрушает связи между понятиями, содержащиеся в воспринимаемой информации, что препятствует ее пониманию.

Задача учителя состоит в том, чтобы построить абстрактные теоретические модели, раскрывающие его сущность, поэтому необходимо кодирование информации на искусственных языках. Основным источником трудностей, возникающих у детей на этапе перекодирования, является пренебрежение первыми этапами символизации, которые учителя традиционно специально не выделяют, считая их очевидными. Однако у многих детей с невысоким уровнем развития абстрактно-логического мышления именно эти стадии вызывают трудности при понимании операций абстрагирования от несущественных признаков наблюдаемого и замене реальных объектов символами. Поэтому необходим этап символизации образа, который, с одной стороны, имеет определённые черты сходства с реальными объектами, но, с другой стороны, лишен качественного своеобразия реальных объектов.

По выражению О.И. Плакатиной [31], ведущим средством формирования вышеуказанных компонентов являются математические задачи.

1.3. Задачи, как средство достижения понимания.

По мнению Росинской В.В. [47] понимание учащимися учебного материала по математике может быть достигнуто через решение определенным образом организованной системы математических задач. Безусловно, с этим согласны, но О.И. Плакатина [31] утверждает, что математические задачи выступают как средство достижения понимания, и как его критерии и почти любая задача, с одной стороны, позволяет выявить степень понимания школьниками учебного материала, с другой - способствует его формированию. О.И. Плакатина [31] отмечает те особенности математических задач, которые делают их ведущим средством реализации поставленной цели; создания условий для достижения школьниками понимания содержания школьной математики.

1. В процессе решения любой математической задачи приходится привлекать знания и способы действий, усвоенные в других разделах. Тем самым решение задач способствует установлению разнообразных связей: нового материала со «старым», внутри вновь изучаемого, а также новых связей внутри ранее изученных разделов. Как было указано выше, именно установление многообразных связей является важнейшим условием эффективности процесса формирования понимания изученного [31].

2. В ходе решения задач появляется возможность для ученика освоить ряд действий, являющихся базовыми в процессе понимания. Если, например, задача представлена на естественном языке (то есть решается текстовая задача), изучение условия способствует формированию умения понимать печатный текст. Если, решается геометрическая задача по готовому чертежу, то ученик, «прочитав» чертеж, переводит его данные на естественный язык. Аналогичные действия «перевода» с одного языка на другой приходится осуществлять, если исходные данные представлены символическим языком. Все это - действия, необходимые для осуществления процесса понимания. Формируясь в ходе решения задач, они затем помогут учащимся и при осмыслении другого содержания [31].

3. С теми же действиями ученик сталкивается и при поиске решения задачи. О.И. Плакатина в своей работе [31] использует труды Славской К.А. [51], которая утверждает, что сущность процесса решения любой задачи заключается в последовательном переформулировании ее условий и требований, оно осуществляется до тех пор, пока между ними однозначно не укладывается принцип решения задачи.

А, как было отмечено ранее, действие перекодирования информации является одним из ведущих в процессе понимания.

4. В школьных условиях задачи являются основным средством применения изученной теории. А именно такое применение, с одной стороны, способствует достижению понимания изученного материала, с другой, если ученик сумел его осуществить, это умение является критерием достижения понимания. Особенно важную роль призваны сыграть так называемые задачи с практическим содержанием, поскольку здесь приходится осуществлять трансформацию усвоенных знаний, переносить их на объекты другой природы, что требует более глубокого понимания материала [31].

1.4. Проблемы изучения стереометрии.

Курс геометрии в школе традиционно состоит из двух основных разделов: планиметрии, изучающей плоские фигуры и их свойства, и стереометрии, изучающей пространственные фигуры и их свойства. Такой подход к построению школьного курса геометрии имеет как положительные, так и отрицательные стороны.

В.А. Гусев [13] выделяет следующие отрицательные моменты:

Геометрия – наука, опирающаяся на наглядность, возникшая из опыта человека, из его наблюдений за окружающим миром, в котором нет ни одного плоского объекта, изучаемого планиметрией;

при раздельном изучении геометрии и стереометрии много очень повторов, очень много дублирования;

раздельное изучение свойств фигур на плоскости и в пространстве не позволяет ученику увидеть многих общих закономерностей геометрии, ему представляется, что планиметрия и стереометрия это две различные науки;

представление о пространстве не может быть сформировано быстро; формирование пространственных представлений (пространственного мышления, видения) не может протекать только в старших классах, а тем более очень ограниченное учебное время; «входить в пространство» нужно долго, постепенно, продуманно и начинать этот процесс довольно рано;

в настоящее время многие учащиеся завершают или прерывают математическое образование в девятом классе, а изучение пространства и всех окружающих нас объектов традиционно начинают заниматься с десятого класса

Практика преподавания стереометрии показывает, что наибольшие трудности учащиеся испытывают при решении задач. Одной из причин этих трудностей является отсутствие у учащихся необходимых пространственных представлений. Поэтому часто возникает потребность в использовании индивидуальных объемных наглядных пособий, как при изучении теории, так и при решении задач [13].

Опыт преподавания геометрии в средней школе Зайцевой Г.Д. [18], а также опыт проведения вступительных экзаменов в вуз показывает, что многие учащиеся не могут самостоятельно выбирать необходимые знания для решения стереометрической задачи. К решению каждой задачи учащиеся приступают как к чему-то новому, не видят того общего, что уже встречалось в ранее решенных задачах и предлагаемой вновь [18]. Вообще учащиеся испытывают большие трудности при решении стереометрических задач. Даже самые простые задачи кажутся многим школьникам непреодолимыми, поскольку в стереометрии они не могут опереться на наглядность - которая так часто выручала в планиметрии. Возможно, это происходит по причине вышеуказанных недостатков. С. М. Саврасова [48] считает, что одной из причин указанного недостатка является непрочность навыка решения задач по планиметрии. По мнению авторов работы [33] это происходит из-за того, что учащиеся недостаточно понимают изучаемый материал.

Для разрешения данной проблемы авторы работы [33] рассматривают одно из основных средств достижения понимания - задачи.

Использование задач должно способствовать:

- Развитию пространственного мышления;
- Развитию логического мышления;
- Развитию интеллектуальных способностей учащихся (любопытности; критичности; дисциплинированности, самоконтроля).
- Формированию таких понятий геометрии;

Поставленные цели достигаются на самых разных задачах. Среди таких задач выделяют задачи на готовых чертежах.

Эффективность решения задач на готовых чертежах очевидна: она требует меньше времени на анализ ее формулировки, при этом нет необходимости выполнять чертеж, а готовый рисунок сам направляет внимание на главное в задаче. Особенно это важно для формирования пространственного во-

ображения учащихся, развития их образного мышления на начальном этапе изучения стереометрии [5].

2. Задачи на готовых чертежах

2.1. Задачи на готовых чертежах.

В данном пункте мы предпримем попытку определить понятие «задачи на готовых чертежах» и проследить использование задач на готовых чертежах в школьных учебниках.

По выражению Восканяна К.В. [9], в традиционной дидактике до сих пор процесс обучения геометрии начинается не с практических действий по созданию геометрических объектов, не с задач по построению простых фигур, а с анализа готовых чертежей. Чему и призваны помочь задачи на готовых чертежах.

При изучении литературы, посвященной задачам на готовых чертежах, мы столкнулись с тем, что данному понятию не дается определение. В связи с этим, ставилась первая задача: определить понятие «задача на готовом чертеже». Мы рассмотрели многие задачи, которые могли бы называться «задачами на готовых чертежах» и решили выделить существенные признаки данного понятия, по которым и будем определять относится ли задача к задачам на готовых чертежах.

Данное понятие будем рассматривать в пределах курса геометрии. «Задача на готовом чертеже»:

- геометрическая задача:
- условие задачи представлено с помощью чертежа (допускаются пояснения к чертежу в виде кратких символьных записей);
- требование представлено в виде текста или выделен на чертеже искомый элемент.

После того как установили описание понятия «задача на готовом чертеже», решили проанализировать школьные учебники и задачники, чтобы выяснить в какой степени привлекаются задачи на готовых чертежах в учебном материале, есть ли такой материал для учителей.

Что касается раздела планиметрии, то многие авторы учебников по геометрии используют задачи на готовых чертежах, но таких задач немного. Так, например, авторы учебника по геометрии А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот [8] задачи на готовых чертежах относят в специальный раздел



«Смотрим»:

стр. 95 задача №2. Найдите равные друг другу углы рис.1.

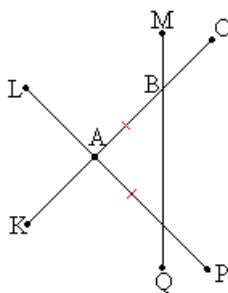


Рис.1.

Этот раздел задач можно увидеть почти после каждого пункта.

Эту же идею использования задач на готовых чертежах поддерживают А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик [2], причем большая часть этих задач подходит под наше описание понятия, в отличие от предыдущих авторов.

Стр. 185-186. Задача №7.14. Вычислите неизвестный угол рис.2.

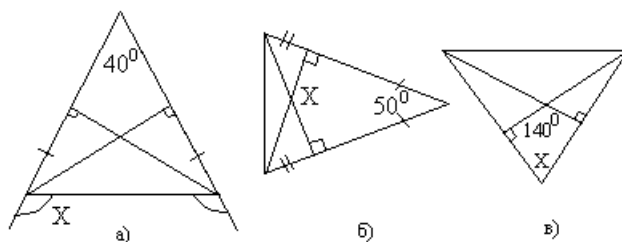
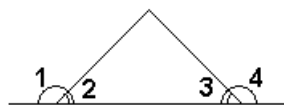


Рис. 2.

В учебнике Шарыгина И.Ф. [59] вообще нет задач на готовых чертежах.

Что касается сборников задач по геометрии, то в сборнике [42] Рабиновича Е.М. практически все задачи подходят под принятое нами описание «задач на готовых чертежах». В некоторых задачах автор помимо того, что показывает условие и требование на чертеже, он еще некоторую часть условия

представляет в символической форме. Например, задача №5 из таблицы 7.3. Смежные углы. Задача №5. рис.3



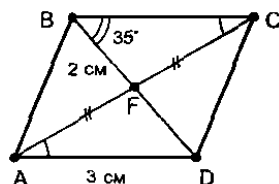
Дано: $\angle 1 = \angle 4$

Доказать: $\angle 2 = \angle 3$.

Рис.3.

Хочется отметить сборник задач Кукарцевой К.И. [26], где приведено большое количество задач на готовых чертежах. Эти задачи подходят под описание понятие, поэтому их можно назвать задачами на готовых чертежах.

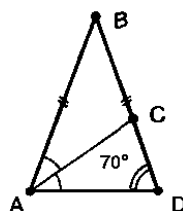
Задача №11 стр.14 рис.4.



Найти: $\angle ADF$, BC , FD

Рис.4.

Задача №14 стр. 35 рис.5



$AB = DB$

Найти: $\angle ACB$

Рис.5

Проанализировав школьные учебники и некоторые задачки по стереометрии, мы можем сказать, что в школьных учебниках практически нет задач на готовых чертежах (мы рассматривали задачи с позиции принятого нами описания задач на готовых чертежах) по стереометрии.

В учебнике Шарыгина И.Ф. [58] предлагается лишь три задачи, которые можно назвать задачами на готовых чертежах. №5–10 стр. 12–14, №6-7 стр.46, №1 стр.52, №11 стр.54. все эти задачи на построение сечения.

Пример: Задача №6 (в). На ребрах треугольной пирамиды взяты три точки, как показано на рисунках. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через три отмеченные точки рис.6.

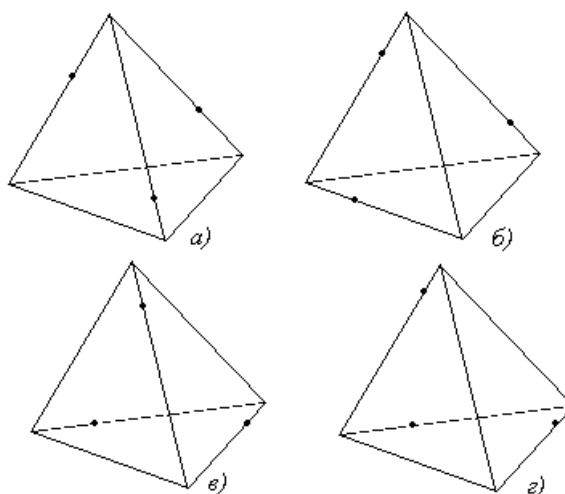


Рис.6

На основе анализа данного учебника можно сказать, что даже таких задач, к которым прилагаются чертежи, очень мало.

В учебнике Геометрия 10–11 Смирновой И.М. [52] ни одна задача не удовлетворяет принятому нами описанию и, следовательно, в этом учебнике нет задач на готовых чертежах. Присутствуют лишь такие задачи, к которым прилагаются чертежи.

Пример: На странице 77 задача №1 рис.7.

Определите, какие графы из тех, что изображены на рисунке 106, являются уникальными.

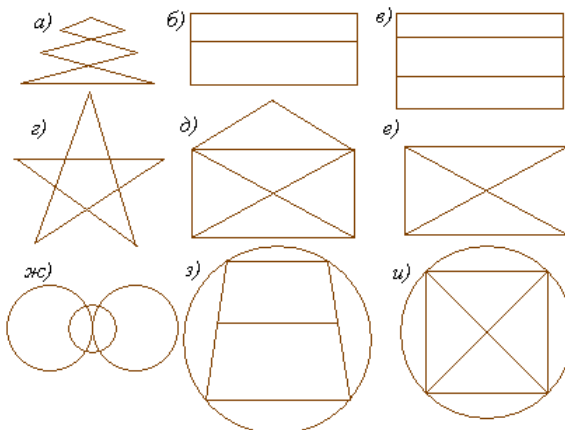


Рис. 7.

Эту задачу мы можем считать задачей на готовом чертеже, но она не относится к разделу геометрии. В основном в этом учебнике задачи на готовых чертежах только такого типа. К этим задачам относятся задачи №3, №5 (стр.42), №9 (стр.53), №6 (стр.64), №1-2 (стр.69), №1(стр.77), №2-3 (стр.86), №8-9 (стр.93), №4 (стр.146). Как видно даже задач такого типа очень мало.

В учебнике А.П. Киселева и Н.А. Рыбкина [21] отсутствуют задачи на готовых чертежах. В задачнике по геометрии текст задач сопровождается демонстрационным чертежом. **Например,** задача №28 (стр. 150). Основанием наклонной призмы служит правильный треугольник со стороной a ; длина бокового ребра равна b ; одно из боковых ребер образует с прилежащими сторонами основания углы в 45° . Определить боковую поверхность этой призмы рис.8.

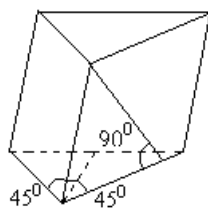


Рис.8.

Задачи такого типа мы не считаем задачами на готовых чертежах, так как задача текстовая, а чертеж иллюстрирует текст, причем на чертеже показаны не все условия. Предполагается авторами, что учащиеся должны выполнить чертеж к задаче. Но мы считаем, что задачи такого типа упрощают работу по построению чертежа и сводятся к простому его копированию, что не будет способствовать пониманию задачи. Ведь ученики не задумываются об условии задачи, копируя чертеж, таким образом, не формируется действие перекодировки.

Ковалева Г.И. – составитель дидактического материала по геометрии, сопровождает многие задачи чертежами. Именно «сопровождает», иначе сказать нельзя, так как эти задачи мы не можем отнести к задачам на готовых чертежах в связи с тем, что изображен чертеж и составлено краткое условие задачи. А составление краткой записи задачи – основная часть работы задачи

с готовым чертежом. Главная идея решения задач на готовых чертежах в том, что учащиеся должны осуществить перевод условия с графического языка на символичный язык, то есть осуществить мыслительную операцию перекодирования. А как говорилось в 1.3. перекодирование есть необходимое действие для уяснения смысла и значения представленной информации.

В целом, среди всех проанализированных сборников по стереометрии можно выделить сборник задач по стереометрии Рабиновича Е.М. [41], эти задачи подходят под описание задач на готовых чертежах. Свои задачи на готовых чертежах автор публикует в газете математика [43], [44], [45], [46].

Например, задача №4, стр. 27, таблица 10.14. [45] рис.8.

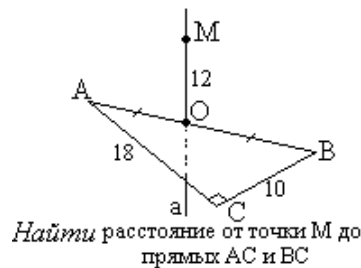
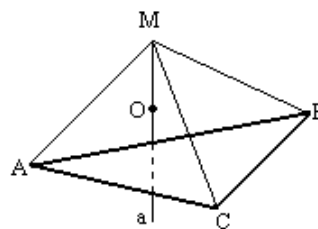


Рис.8.

Хочется сделать замечание к некоторым задачам Е.М. Рабиновича. Автор не выносит в чертеж условие задачи полностью, а некоторые данные приводятся как пояснения к чертежу. Хотя чертеж позволяет, чтобы на нем были указаны все данные задачи.

Задача №4, стр. 19. Таблица 10.10. [44] рис.9.

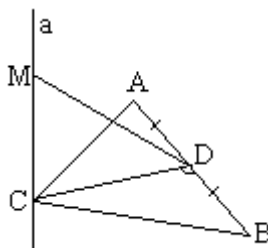


Дано: О – центр окружности, описанной около $\triangle ABC$. $\angle ACB = 120^\circ$, $AB = 6$, $MO = 2$.

Найти: MC .

Рис.9.

Но есть и такие задачи, в которых не все условия можно вынести в чертеж рис.10.



Дано: $\angle ACB=90^\circ$, $AC=4$, $MD=3$.

Найти: MC .

Рис.10.

На этом чертеже, действительно, сложно будет разобраться, какой из отрезков равен 4см. Аналогично можно сказать про отрезок MD . Поэтому и допускаются пояснения к чертежу в таком случае.

В итоге можно сказать, что в различных учебных пособиях на много больше встречаются планиметрические задачи на готовых чертежах, чем стереометрические. Это объясняется, наверное, тем, что к задачам стереометрии сложно составить готовый чертеж со всеми условиями.

Независимо от того, что авторы учебников геометрии не уделяют достаточного внимания задачам на готовых чертежах, многие учителя активно используют их и делятся своим опытом.

Так, например, Л.Ф. Черникова [57] выступает за использование задач на готовых чертежах и предлагает свои идеи к использованию таких упражнений.

Л.Ф. Черникова [57] считает, что на уроках геометрии почти каждое высказывание и каждый ответ на поставленный вопрос должны сопровождаться демонстрацией чертежей. Чертеж и данные задачи должны находиться перед глазами учащихся на протяжении всего процесса решения задачи.

Многие авторы считают, что учащиеся легче решают задачи, когда видят условие. Именно поэтому упражнения на готовых чертежах оказывают неоценимую услугу в усвоении и закреплении новых понятий и теорем. Они

отвечают всем вышеизложенным требованиям, кроме того, позволяют в течение малого времени усвоить и повторить большой объем материала, т.е. увеличивается темп работы на уроках.

Л.Ф. Черникова [57] утверждает, что основные назначения упражнений на готовых чертежах заключаются в том, чтобы активизировать мыслительную деятельность учащихся, обучать их умению рассуждать, сопоставлять и противопоставлять, находить общее и различное в чертежах, делать правильные умозаключения.

Л.Ф. Черникова [57] предлагает комплексы упражнений на готовых чертежах по теме «Четырехугольники». Которые предназначены для:

- 1) Усвоения свойств и признаков четырехугольников;
- 2) Закрепления изученных понятий;
- 3) Проведения обобщающего урока по указанной теме.

При изучении темы «Параллелограмм и трапеция» для усвоения и закрепления определений параллелограмма и трапеции Л.Ф. Черникова советует использовать следующие упражнения.

1. Выяснить являются ли следующие фигуры параллелограммами рис.11.

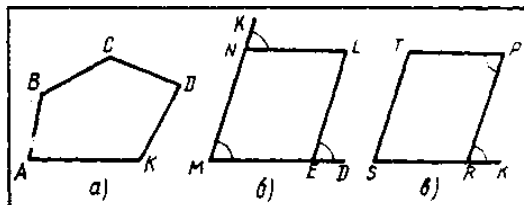


Рис.11.

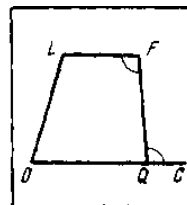


Рис.12.

Выполняя это упражнение, учащиеся допускают следующие типичные ошибки. Доказав, что четырехугольник MNLE- параллелограмм (рис11б), многие из них по аналогии заявляют, что четырехугольник STRP тоже параллелограмм (рис11в). В этом случае полезно дать сразу еще один контрпример. Учащиеся отмечают, что при одних и тех же данных (рис.11в и рис.12) фигуры могут быть различны. Только после этого они приходят к верному выводу о том, что четырехугольник STRP (рис.11в) может быть, а может и не быть параллелограммом, – данных недостаточно.

Выполнение подобных упражнений помогает устранить плохую привычку учащихся делать выводы, исходя не из данных задачи, а из чертежа.

2. Доказать, что изображенные на рис.13 фигуры являются параллелограммами.

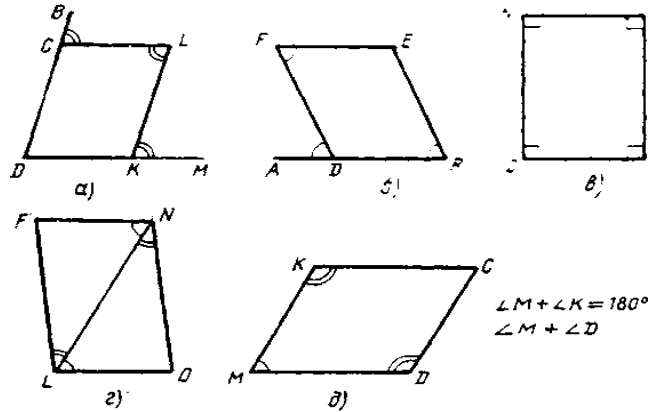


Рис13.

При решении подобных устных задач одновременно с усвоением нового материала происходит процесс повторения признаков параллельности прямых.

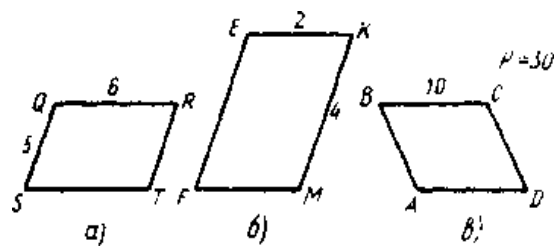


Рис.14.

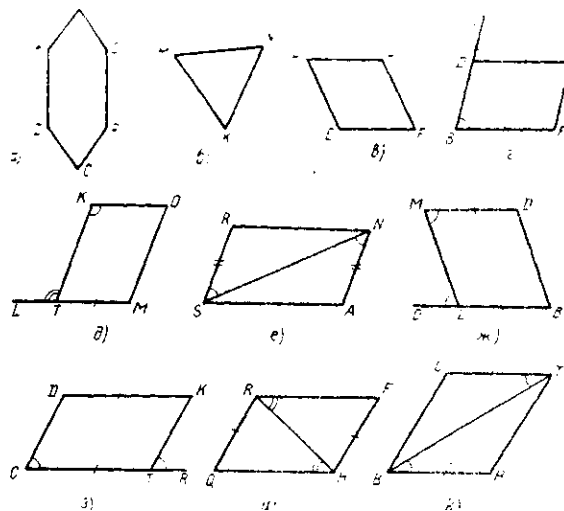


Рис15.

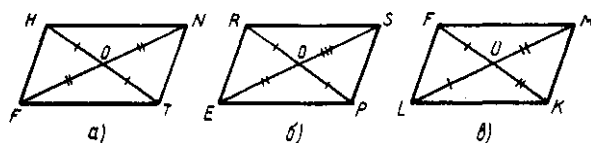


Рис.16.

6. Найти стороны ST и RT параллелограмма SQRT (рис.15а).

7. Вычислить периметр параллелограмма FEKM, если известны две его смежные стороны (рис.15б).

8. Можно ли найти сторону AB параллелограмма ABCD, если периметр параллелограмма равен 30см, а сторона BC равна 10 см (рис.15,в)?

11. Определить, какие из следующих фигур, изображенных на рис.17 и рис.19, являются параллелограммами:

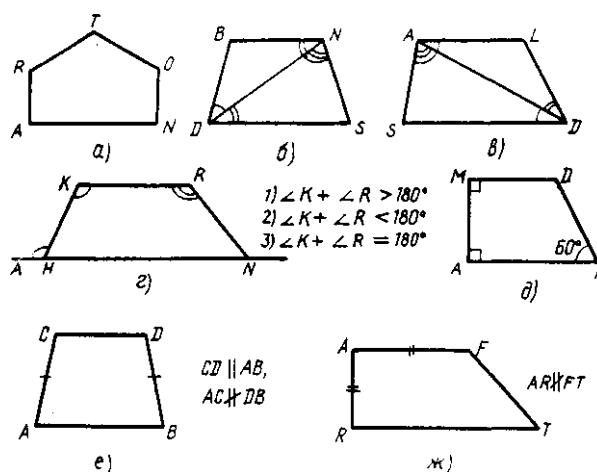


Рис.17

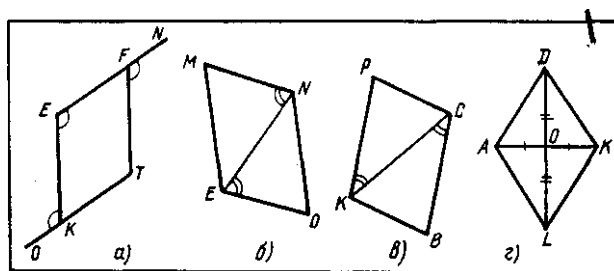


Рис.18.

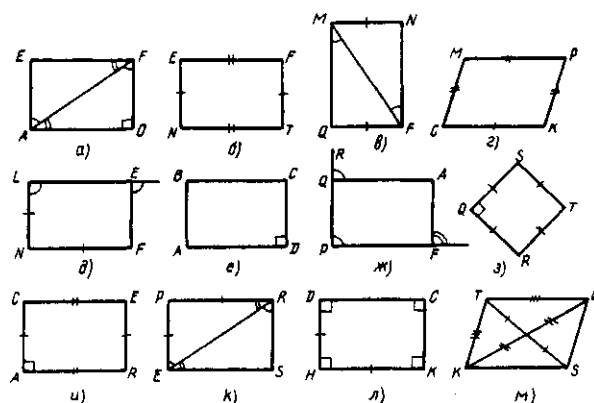


Рис.19.

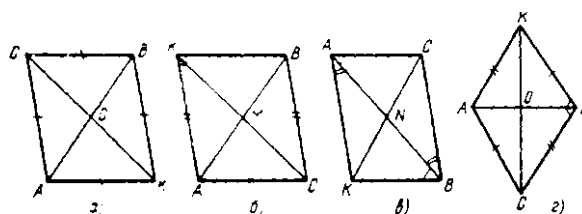


Рис. 20.

Характерные ошибки, которые допускают учащиеся при решении подобных задач:

а) невнимательное прочтение условия задачи: так, на рис.17,д учащиеся часто не замечают, что накрест лежащие углы не равны, а на рис.17,ж учащиеся не обращают внимания на неравные стороны и заключают, что фигуры, изображенные на этих рисунках,— параллелограммы:

б) наиболее частая ошибка учащихся - это неверное применение первого признака параллелограмма: учащиеся рассматривают параллельность одних сторон, а равенство других сторон (рис.17,з,и), и заключают, что фигуры, изображенные на этих рисунках, суть параллелограммы;

в) неумение находить равные части одной и той же диагонали, на которые диагонали делятся точкой пересечения (рис. 19,в).

Поэтому эти упражнения рекомендуется предлагать чаще, чем другие.

Упражнения для усвоения определения трапеции, равнобедренной и прямоугольной трапеции:

12. Определить, какие из следующих фигур являются трапециями, и определить вид трапеции, где это

возможно (рис.20).

На последующих уроках изучения темы "Параллелограмм и трапеция" с целью повторения и проверки усвоения учащимися учебного материала Л.Ф. Черникова [57] предлагает использование задачи 1—12 и аналогичные им или более сложные, в зависимости от уровня подготовки и состава учащихся. На чертежах как к этим, так и ко всем предлагаемым задачам равные углы и равные отрезки отмечаются одинаковыми знаками, прямые углы обозначаются квадратиками. Такой способ обозначений на чертежах помогает учащимся быстрее ориентироваться в условии задачи. Предлагаемые в работе задачи целесообразно включать в качестве устных упражнений, чертежи к которым готовятся учителем заранее на доске или на плакатах, и отводить на них по 10 мин в начале каждого урока.

Все предлагаемые специальные упражнения, которые учитель может использовать при фронтальном опросе, требуют от учащихся умения применять определения, свойства и признаки изучаемых фигур в различных ситуациях, умения быстро ориентироваться в условиях задачи. Это гораздо полезнее простого воспроизведения формулировок. Вместо любого вопроса вида "Что называется..?" "Какими свойствами обладает..?" полезнее предложить соответствующее упражнение.

Наконец, предлагаемые упражнения выполняют еще одну роль. Они быстро готовят учащихся к запоминанию и самостоятельному решению таких задач, для которых эти упражнения являются подзадачами.

Предлагаемая методика проведения уроков с использованием упражнений на готовых чертежах повышает творческую активность учащихся, эффективно развивает логическое мышление, является хорошим средством усвоения и закрепления теоретического материала [57].

Анализируя вышеизложенное, можно сказать, что учащиеся с помощью предложенных фигур сравнивают и делают определенные выводы о принадлежности объекта понятию. За счет этого сравнения реализуется установление связей, что по определению способствует пониманию материала. К.Д. Ушинский писал: «Если вы хотите, чтобы какой-нибудь предмет внешней

природы был понят ясно, то отличайте его от самых сходных с ним предметов... напрасно нас упрекают в том, что мы везде настаиваем на сравнении: другого пути для понимания предметов внешней природы нет». Действительно, получаем, что с помощью задач на готовых чертежах реализуется метод сравнения и, тем самым, достигается понимание того или иного материала.

Мнение С. Н. Кузнецова [25] совпадает с мнением Л.Ф. Черниковой [57], что устное решение геометрических задач по готовым чертежам увеличивает число задач, разобранных в классе, развивает пространственное представление учащихся и прививает навык отыскивания различных способов решения задачи, что влечет за собой повторение большого объема ранее изученного теоретического материала. В связи с этим С. Н. Кузнецов [25] рекомендует подбирать такие задачи, которые можно решить несколькими способами.

К этой же группе авторов примыкает Беркутова Т.В. [5]. Она также считает, что решение задач на готовых чертежах эффективно. И это очевидно: требует меньше времени на анализ её формулировки, при этом нет необходимости выполнять чертёж, а готовый рисунок сам направляет внимание школьников на главное в задаче. Беркутова Т.В. [5] отмечает, что особенно это важно для формирования пространственного воображения учащихся, развития их образного мышления на начальном этапе изучения стереометрии.

Опыт С. Н. Кузнецова [25] показал, что учащиеся с большим интересом решают устно геометрическую задачу по готовому чертежу, находят различные способы решения и, сравнивая их, сами указывают наиболее рациональный способ.

Есть и такой вариант: на уроках геометрии на доске обычно выполнены чертежи домашних задач. По готовым чертежам обсуждается план их решения. Выбирается наиболее рациональное [29].

Устное решение задач должно быть связано с изучаемым материалом. В начале урока оно проводится для повторения пройденного и подготовки учащихся к восприятию нового материала, а в середине или в конце урока призвано закрепить только что изученный материал.

При самостоятельном решении геометрических задач учащиеся иногда затрудняются в построении чертежа. Небрежные, искажающие действительность рисунки часто приводят к ошибкам. Поэтому, решая устно задачу по готовому чертежу, следует делать анализ построения геометрических объектов, указанных в задаче [25].

Отмечается и такое достоинство задач на готовых чертежах, что уроки решения нестандартных задач лучше проходят методом "мозгового штурма" по готовому чертежу на доске [29].

М.В. Самойлова, С.Л. Салынина [49] поддерживают принцип наглядности при использовании задач на готовых чертежах, но реализуется эта идея за счет использования компьютера. Чертежи строятся на глазах у учеников, при доказательстве теорем появляется возможность многократного повторения логической цепочки одновременно с дополнительными построениями и выделением всех необходимых элементов (углов, отрезков и т.д.) Отпадает необходимость при подготовке к уроку загромождать доску большим количеством чертежей, значительно экономится время учителя. М.В. Самойлова, С.Л. Салынина [49] сделали и апробировали компьютерные варианты комплектов задач к темам: "Параллельность прямых", "Вписанные углы", "Касательные и окружность", "Теорема о трёх перпендикулярах"; разработки уроков по темам "Виды углов при параллельных прямых и секущей", "Признаки параллельности прямых". "Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная к окружности".

Подведем итог: увеличивается количество учителей, которые используют задачи на готовых чертежах. В основном создаются и используются планиметрические задачи на готовых чертежах. Среди проанализированных работ Рабиновича Е.М. [40], Беркутовой Т.В. [5], С. Н. Кузнецова [25], Л.Ф.

Черниковой [57], можно выделить главное: учителя преследуют главную цель, используя задачи на готовых чертежах – экономия времени. Безусловно, при таком количестве часов геометрии это большой плюс, но еще и нужно учитывать другие аспекты.

При решении задач на готовых чертежах, учащийся должен перекодировать из графической формы в символическую. А правильная организация учителем по работе с такими задачами при обучении, способствует достижению понимания учащимися материала.

Как было сказано в п. 1.2 у многих детей с невысоким уровнем развития абстрактно-логического мышления этап символизации вызывает трудности при понимании операций абстрагирования от несущественных признаков наблюдаемого и замене реальных объектов символами. Поэтому необходим этап символизации образа. Он может быть реализован с помощью работы с задачами на готовых чертежах.

Считаем, что задачи на готовых чертежах нужно использовать на уроках геометрии. Если учитель не имеет набора задач на готовых чертежах, можно попытаться самому разрабатывать задачи такого типа.

На основе анализа школьных учебников следует согласиться с Беркутовой Т.В. [5] и другими авторами большинства статей, что в школьных учебниках решение задач основано на трансформации словесной формулировки задачи в чертеж, а использование обратной операции не предусмотрено. И по выражению Беркутовой Т.В. [5] это ведет к перекосу в обучении умению решать геометрические задачи и формировании математического мышления в целом, не способствует развитию понимания материала. Понимание в значительной степени определяется предварительными знаниями и умениями. Например, в начальных классах пониманию условий арифметической задачи способствует правильное прочтение ее текста, четкое выделение того, что известно, и поставленного в ней вопроса. Если же ребенок плохо владеет навыком чтения, ему трудно проделать такой анализ и именно поэтому трудно решить задачу. Проведем аналогию с задачами на готовых чертежах. Если

ученик плохо владеет навыком чтения чертежа, ему трудно будет решить задачу. Большую роль при решении задач на готовых чертежах играет чертеж, а о того, как чертеж представлен в задаче будет зависеть работа ученика с ним. Поэтому должны соблюдаться все требования к чертежам в задачах на готовых чертежах. Рассмотрим, какие требования к чертежам предъявляются в литературе.

2.2. Требования к чертежам

Как уже было сказано, при обучении решению геометрических задач, особенно на первых порах, следует уделять самое пристальное внимание этапу анализу чертежа задачи. Отсюда вытекает ряд требований к чертежам.

По выражению Н.М. Бескина [6], при построении чертежей должны сохраняться два основных требования: наглядность и удобоизмеримость. При наглядности изображение чертежа должно быть похоже на оригинал, а при удобоизмеримости должны сохраняться все масштабные размеры оригинала.

В пособии Л.М.Фридмана и Е.Н.Турецкого [56] выделены требования к использованию чертежей:

1. Чертеж должен представлять собой схематический рисунок основного объекта задачи с обозначением с помощью букв и других знаков всех элементов фигуры и некоторых ее характеристик;

2. Чертеж должен соответствовать задаче. Это означает, что если в задаче в качестве основного объекта назван, например, треугольник и при этом не указан его вид (прямоугольный или равносторонний и т. д.), то надо, чтобы изображен был какой-либо разносторонний треугольник, так как в противном случае ученик будет пользоваться этими свойствами и он может сбиться при решении задачи и ход будет совсем другой;

3. Необходимо, чтобы были соблюдены пропорции фигуры и ее элементов. Например, если в условии задачи сказано, что сторона АВ треугольника ABC наибольшая, то и на чертеже она должна быть изображена наибольшим отрезком. Или если задана биссектриса треугольника, то соответствующий ей отрезок на чертеже должен делить угол треугольника приблизительно пополам и т. д. Точно также должны быть соблюдены такие отношения, как параллельность, перпендикулярность.

4. Лучше, если то, о чем спрашивает задача, будет выделено другим цветом или обозначена буквой х, или рядом с чертежом будет вынесена надпись «найти» искомый элемент.

Добавим к вышесказанному, чертеж должен быть удобным по расположению, чтобы не возникали трудности при чтении чертежа. Приведем пример, чертеж на рис.21. не совсем удобный по расположению. Наиболее удачный по расположению чертеж на рис.22.

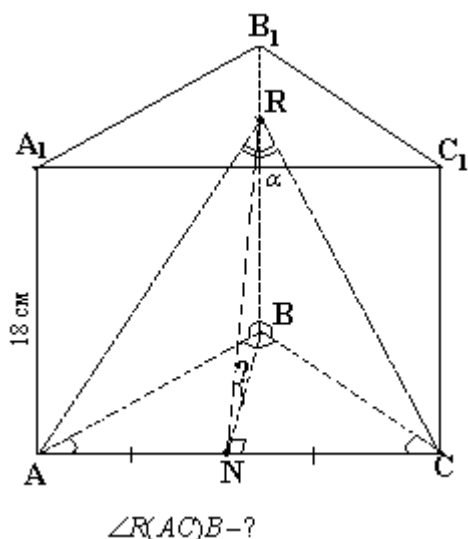


Рис.21.

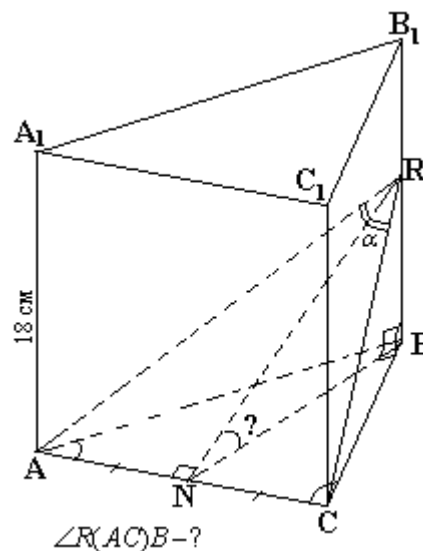


Рис.22.

В. А. Далингер [21] выделяет в школьном курсе геометрии три вида чертежей:

- чертежи, иллюстрирующие содержание вводимого понятия;
- чертежи, образно представляющие условие задачи или рассматриваемого математического предложения;
- чертежи, иллюстрирующие преобразования геометрических фигур.

Рассматривается работа с чертежами первых двух видов, поскольку они имеют более общее назначение [21].

В. А. Далингер [14] считает, что, формируя у учащихся умение работать с чертежом, учитель должен помнить, что если ограничиваться стандартными чертежами, то школьники достаточно быстро начнут связывать формируемое понятие только с фигурами определенного вида и положения. «Стандартный» чертеж вызывает у учащихся неверные ассоциации, в результате которых в содержание понятия вносятся лишние признаки, являющиеся частными признаками демонстрируемой фигуры. Приводит примеры.

Выполняя задания на распознавание углов, некоторые учащиеся VI класса называют углом лишь фигуру, изображенную на рис. 231, б. Фигуры на рис. 23, а, в эти учащиеся не считают углами, так как часто видят только те изображения углов, которые аналогичны рис. 23, б. Школьники «попадают в плен» к наглядности:

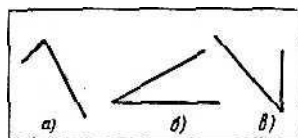
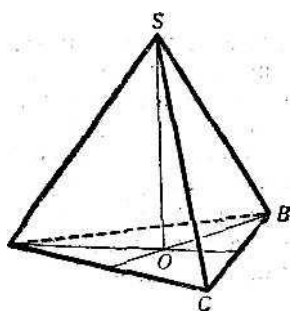


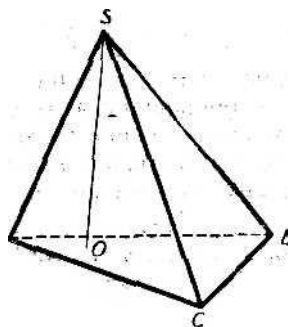
Рис.23.

Что касается раздела стереометрии, то А. К. Артемов [3] утверждает, что когда в условии задачи указано, что пирамида неправильная, учащиеся изображают треугольную пирамиду в виде чертежа рис.24, т. е. слова «правильная пирамида» и «неправильная пирамида» влекут за собой одинаковые действия. Но это означает, что причина рассматриваемой ошибки заключается в наличии у учащихся некоторой ошибочной ассоциации.



Правильная пирамида.

Рис. 24.



Неправильная пирамида.

Рис.25.

А. К. Артемов [3] ссылается на исследования Шеварева П.А. и говорит, что такие ошибки возникают при многократном выполнении однотипных заданий и учащиеся перестают учитывать особенности фигуры. Подбор задач в задачнике Н. А. Рыбкина обеспечивает очень благоприятные условия для подкрепления и сохранения ошибочной ассоциации. При выполнении упражнений по стабильному задачнику Н.А. Рыбкина, значительно чаще приходится иметь дело с правильными треугольными пирамидами, чем с неправильными. Например, в §11 и §12 имеется соответствен-

но пять и три задачи на правильную треугольную пирамиду и лишь одна задача на неправильную пирамиду. Более того, в задачнике имеются специальные разделы, в которых подобраны задачи только на правильные пирамиды (например, § 10, 17).

В этих условиях неизбежны случаи, когда ясное осознание термина «правильная» в составе условия задачи не является психологически необходимым компонентом процессов построения изображения вида чертежа рис.1.

Действительно, приступая к решению задач, объединенных общим названием «правильная пирамида», ученик заранее, до чтения условия задачи, знает, с какими пирамидами он будет иметь дело. Поэтому для верного построения чертежа, соответствующего условию задачи, существенное значение приобретает только слово «треугольная» (или какая-либо иная) пирамида.

Эффективность формирования у учащихся понятий, которые можно представить наглядно, в значительной степени зависит от того, в каком виде произошло первое знакомство с ним, т. е. каким оказался первый зрительный образ, ставший затем носителем данного понятия (сила первого впечатления). Поэтому в начале изучения понятия надо показывать как можно больше чертежей, в которых варьируются несущественные признаки понятия [14]. А для этого могут быть использованы задачи на готовых чертежах.

Чертежи и рисунки — эффективное средство формирования у учащихся умения подмечать закономерности на основе наблюдений, вычислений, преобразований, сопоставлений. Д. Пойа [37].

Помимо Д. Пойа, другие достоинства чертежа отмечает Восканян К.В. [9]:

- чертеж демонстрирует реально те обстоятельства, которые приводят к формированию той или иной теоремы и задачи;
- на основе чертежа выявляются переходы исходных понятий в производные;
- чертеж выступает в роли своеобразной модели, построение которой требует

воспроизведения предметных действий, позволяющих обнаружить содержательные связи и отношения между разными понятиями в составе общего геометрического понятия;

– чертеж является источником различных проблемных ситуаций, которые в дальнейшем, как скрытые задачи, оформляются в словесно-абстрактную форму, которую школьник должен определить самостоятельно в процессе решения;

– на основе чертежа воссоздаются знаковые модели тех проблемных ситуаций, которые выступают в опосредствованной форме;

– чертеж является своеобразным мостиком между «предметными» и умственными действиями, т.е. выступает в роли среднего звена между чувственной и рациональной ступенями познания и обеспечивает последовательные переходы между практической и теоретической деятельностью.

Чертеж позволяет наглядно представить учащимся важную математическую идею или подвести их к осознанию неочевидного факта.

Особое место в развитии мышления занимает обучение сравнению, в частности сравнению факта, выраженного словесно, с его интерпретацией на чертеже. Как и Л.Ф. Черникова [57], В. А. Далингер [14] утверждает, что чертеж может служить опровержением какого-то общего высказывания. Участь опровергать неверные высказывания, школьники постепенно привыкают к доказательствам.

Рассмотрим три задания, которые фактически нацеливают учащихся на поиск контрпримеров.

1. Верно ли утверждение: «Любой четырехугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, является ромбом»?

2. Верно ли утверждение: «Любой четырехугольник, у которого два противоположных угла прямые, является прямоугольником»?

3. Изобразите на чертеже случай, для которого неверно высказывание:

«Прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют ни одной общей точки» (пропущено указание на то, что речь идет о двух прямых).

Чертежи-контрпримеры, требующиеся в заданиях 1 — 3, указаны на рис.26, *a—в* соответственно [14].

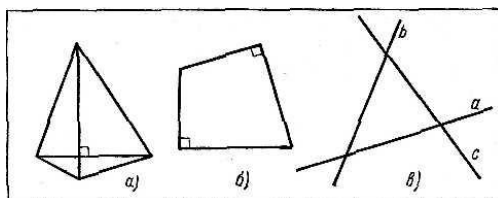


Рис.26.

Сделаем вывод. Прежде чем использовать задачи на готовых чертежах, составленные им или предлагаемые авторами различных сборников, учитель должен проанализировать, удовлетворяет ли чертеж всем требованиям. Использование задач на готовых чертежах может сформировать правильные ассоциации у детей, но только при правильной методике работы с этими задачами. А. К. Артемов [3], предлагает вариант подбора задач по принципу перемежающегося противопоставления (чередующиеся упражнения, например, на разные пирамиды), а не по принципу последовательного противопоставления (сначала упражнения только на один тип пирамид, а затем только на другой тип), как это принято в настоящее время в задачнике Н.А. Рыбкина. Таким образом, исследуя пути решения, мы коснулись типологии задач на готовых чертежах. Многие авторы классифицируют текстовые задачи по разным основаниям. Но, что касается упражнений и задач по готовым чертежам, то никакой типологии в литературе, посвященной этому классу задач, нет. Мы решили сами выделить типологию задач на готовых чертежах.

2.2. Типология задач на готовых чертежах

В качестве основания будем использовать представление требования на чертеже.

Так как задачи на готовых чертежах могут способствовать пониманию материала, следовательно, мы решили представить еще и типологию с точки зрения понимания.

Для выделения классификации задач на готовых чертежах мы используем классификацию геометрических задач, которые в курсе геометрии бывают преимущественно текстовые. Их можно разбить на следующие группы по требованию:

- I. задачи на вычисление;
- II. задачи на доказательство;
- III. задачи на построение или конструирование задачи.

Исходя из вышеизложенной классификации и анализа задач, мы решили представить классификацию задач на готовых чертежах по требованию:

- 1) элементарные упражнения, требующие умения разбираться в чертеже (6 класс);
- 2) задачи на вычисление;
- 3) задачи на доказательство.

Примерами задач, относящихся к первому типу (элементарные упражнения, требующие умения разбираться в чертеже) могут служить такие задачи:

1. сколько отрезков на прямой MN? рис.27.

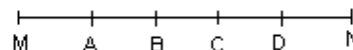


Рис.27

2. Назвать все отрезки.

2. Сколько треугольников на чертеже? Назвать все треугольники. Назвать два треугольника, имеющие

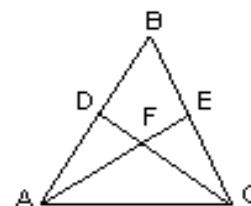


Рис.28.

общую сторону; два треугольника, имеющие общий

угол; три треугольника, имеющие общий угол, и т. п. рис.28.

В свою очередь среди задач на вычисление можно выделить (по изображению требования относительно чертежа):

1) задачи, в которых данные элементы отмечены на чертеже, а искомый обозначен буквой x (равные элементы отмечены одинаковыми значками) рис.29.

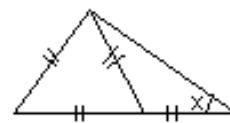


Рис.29.

2) задачи, в которых некоторые элементы отмечены на чертеже, а остальные и искомый элемент записаны вне чертежа с заданием “найти”.

3) Могут встретиться также смешанные задачи первого и второго типа.

Некоторые задачи на вычисление представляют собой те же задачи на доказательство, но предложенные в другой форме.

Решение задач на доказательство надо начинать еще при прохождении первой темы геометрии, выбирая наиболее простые задачи.

Задачи на доказательство могут предлагаться, как было отмечено, не только на готовом чертеже, на котором отмечено, что дано, но и можно предложить учащимся самим изготовить чертеж по словесно выраженному условию задачи.

Классифицировать задачи на готовых чертежах можно и по другому основанию.

Задачи на готовых чертежах могут даваться блоками по определенной теме. Их можно давать, как и для ознакомления с новой темой, так и использовать для самостоятельной или контрольной работы после пройденной темы. Приведем пример блока задач для темы «Признак параллельности прямых». Это пособие является переработкой более раннего издания, осуществленного совместно с Г.А. Ястребинецким [60] рис.30.

Найдите пары параллельных прямых (отрезков) и докажите их параллельность.

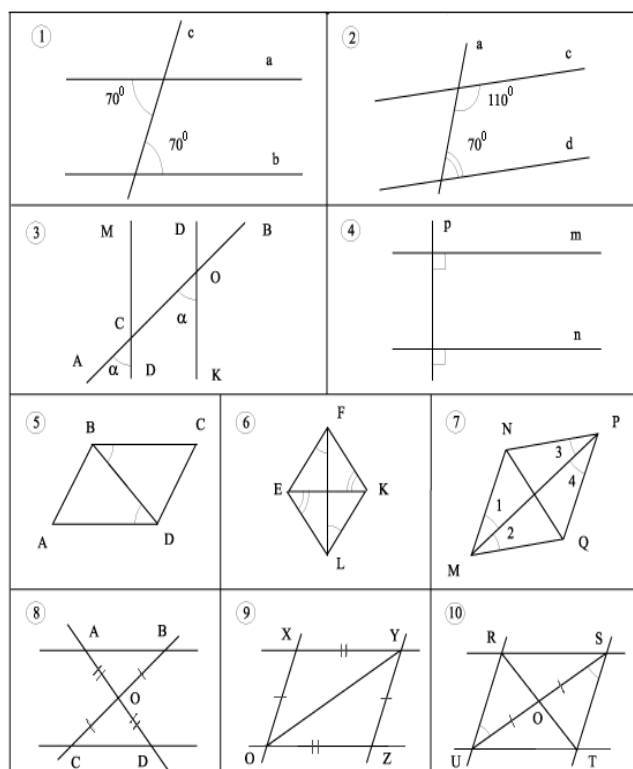


Рис.30.

Пособие призвано помочь учителю в решении следующих дидактических задач.

1. Организация устных вычислений по готовому чертежу для выработки навыков применения соответствующих теорем.
2. Организация обучающей самостоятельной работы учащихся в процессе решения задач.
3. Организация самостоятельной работы, контролирующей состояние знаний учащихся.
4. Отработка теоретических знаний по текущему материалу и ранее пройденному.
5. Развитие устной и письменной математической речи учащихся.
6. Организация повторения курса планиметрии в конце учебного года и в начале следующего учебного года.

Такую работу проводят многие учителя школ, где математика преподаётся по системе дифференцированного обучения, так как каждый ученик работает с таблицей в своем темпе и выполняет столько заданий, сколько он может. Цели обучения: развитие логического и образного мышления, усвоение учащимися программы, соответствующей государственному стандарту образования, приобретение ими навыка решения типовых задач. Основными принципами обучения являются наглядность и доступность [60].

Перейдем к выделению типологии с точки зрения понимания.

Плакатиной О.И. [31] формулируются определенные требования к использованию задач, обеспечивающих «понимающее» усвоение. Термин «понимающее» усвоение введён Е.И. Лященко в противовес традиционному «запоминающему» усвоению. Он означает такую направленность процесса обучения, при которой сначала достигается понимание материала учащимися, а затем (в случае необходимости) его запоминание. Задачи на готовых чертежах относятся к этому классу задач, обеспечивающих «понимающее» усвоение, поэтому можно классифицировать задачи на готовых чертежах по требованиям.

В качестве *первого* требования указывается следующее; при работе с математическими задачами учителю следует обращать внимание школьников на то, какие связи между различными разделами математики были «задействованы» при решении каждой из них, и какие приемы их установления были использованы.

– *Задачи на выявление связей между разделами математики (выявление приёмов использования связей).*

Второе требование к методике работы с задачами: при решении задач, в особенности при поиске решения, вычленять используемые приемы переформулирования условия, интерпретации полученного решения, связи между элементами учебного материала, установленные в ходе этой работы, и делать их предметом усвоения учащимися.

– *Задачи, требующие переформулирования условия, интерпретации полученного решения.*

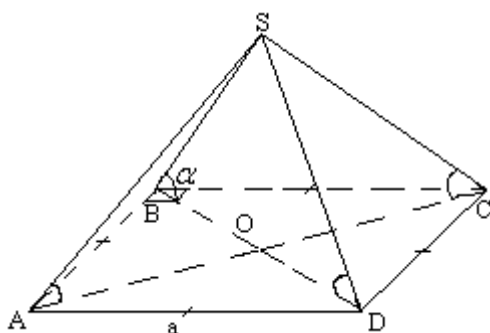
Третье требование к методике работы с задачами, обеспечивающей Понимающее усвоение. Для усиления направленности задач на достижение учащимися понимания целесообразно дополнять их специальными заданиями:

– Задачи (недоопределенные и переопределенные).

– «Провокационные» задачи.

I. Задачи на выявление связей между разделами математики (какие приёмы использования связей были использованы).

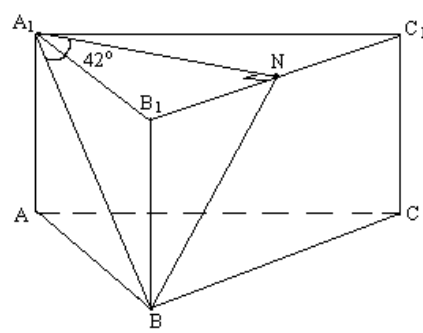
1.



Доказать: $MO \perp (ABC)$.

Рис.31.

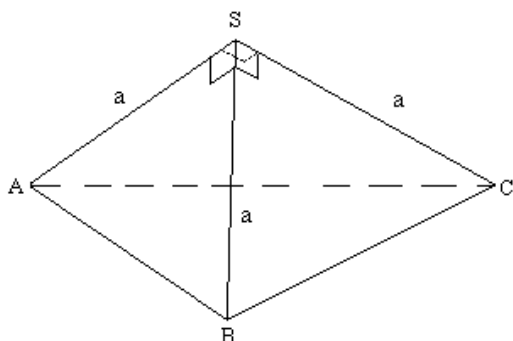
2.



$A_1B \perp (B_1BC)$ -?

Рис.32.

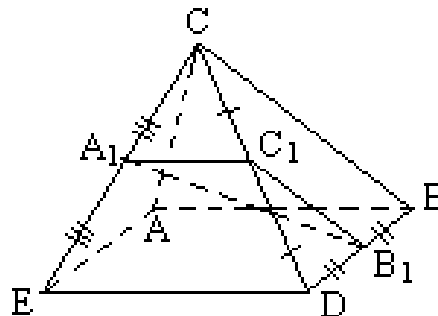
3.



V_{SABC} -?

Рис.33.

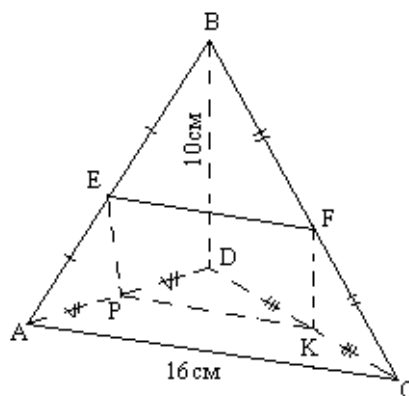
4.



Доказать: $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$.

Рис.34.

5.



P_{EFCR} -?

Рис.35.

Решение задач I группы.

Задача № 1

(1) $AB=BC=CD=AD$ (по условию) $\Rightarrow ABCD$ ромб (по признаку), $\angle BAD = 90^\circ$
(по условию) $\Rightarrow ABCD$ – квадрат (по признаку квадрата) (*) $\Rightarrow BO=OD$,
 $AO=OC$ (по свойству квадрата) (**)

(2) $\angle MBD = \angle MDB = \angle MCA = \angle MAC$ (по условию)

а) В $\triangle MBD$: $BO=OD$, $\angle MBD = \angle MDB \Rightarrow \triangle MBD$ – равнобедренный,
 MO – медиана и высота, $MO \perp BD \Rightarrow$

б) В $\triangle MAC$: $\angle MAC = \angle MCA$, $AO=OC \Rightarrow \triangle MAC$ – равнобедренный $\Rightarrow$
 $MO \perp AC$

$\Rightarrow MO \perp (ABC)$ по признаку параллельности прямой и плоскости.

Рассмотрим на примере задачи №1 вопросы, которые целесообразно выяснить после выполнения требования задачи.

- Определения каких понятий использовались при решении задачи?

(квадрат, равнобедренный треугольник, высота)

- Какие теоремы применялись в ходе решения задачи?

(теорема о свойстве равнобедренного треугольника, теорема о свойствах диагоналей квадрата, теорема признак перпендикулярности прямой и плоскости);

- В каких пунктах использовалась перпендикулярность?

- Почему в п. (*) использовался признак а в п. (**) свойство квадрата?

- Какие данные в условии можно было бы заменить на другие, чтобы ход решения был таким же?

(равенство граней)

- Какие следствия можно получить о высоте пирамиды в данной задаче?

Задача №2

Решение: Найдём угол между A_1V и плоскостью (B_1VC)

1) $A_1N \perp B_1C_1$ (по условию)

2) $BB_1 \perp (A_1B_1C_1)$ (по свойству прямой призмы) $\Rightarrow BB_1 \perp A_1N$ (по свойству прямой перпендикулярной к плоскости)

3) $A_1N \perp B_1C_1$ (по условию), $A_1N \perp BB_1$ (по доказанному) $\Rightarrow A_1N \perp (B_1BC)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости) $\Rightarrow BN$ – проекция A_1B на плоскость (B_1BC) – по определению $\Rightarrow \angle A_1BN$ – угол между A_1B и BB_1C (по определению)

4) $A_1N \perp (BB_1C_1)$, $BN \subset (BB_1C_1)$ (по доказанному) $\Rightarrow AN \perp BN$ (по свойству прямой перпендикулярной к плоскости) $\Rightarrow \Delta A_1NB$ – прямоугольный (по определению) $\Rightarrow$

$$\angle A_1BN = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ \text{ (по свойству прямоугольного треугольника)}$$

Ответ: 48°

Задача №3

Решение: 1) $V = \frac{1}{3}SH$;

$$AS \perp SB,$$

2) $SB \perp SC$, (по условию) $\Rightarrow AS \perp (SCB)$ (по знаку прямой перпендикулярной к $AS \perp SC$ плоскости);

3) $AS \perp SCB$ (по доказанному) $\Rightarrow AS$ – высота пирамиды $SABC$, проведённая к грани SBC

$$AS = b;$$

4) $SB \perp SC$ (по условию) $\Rightarrow \Delta BSC$ – прямоугольный $\Rightarrow S_{SBC} = \frac{1}{2}a^2$;

$$5) V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot a = \frac{a^3}{6} (\text{см}^3)$$

Ответ: $\frac{a^3}{6} (\text{см}^3)$

Задача №4

Решение:

1) В ΔDBC : $DB_1=B_1B$, $DC_1=C_1C$ (по условию) $\Rightarrow C_1B_1$ – средняя линия (по определению) $\Rightarrow C_1B_1 \parallel CB$ (по свойству средней линии);

2) В $\triangle CED$: $CC_1=C_1D$, $CA_1=A_1E$ (по условию) $\Rightarrow A_1C_1$ – средняя линия (по определению) $\Rightarrow A_1C_1 \parallel ED$;

3) $EABD$ параллелограмм (по условию) $\Rightarrow ED \parallel AB$, $DB \parallel AE$ (по свойству параллелограмма), $A_1C_1 \parallel ED$ (по доказанному) $\Rightarrow A_1C_1 \parallel AB$ (по признаку параллельности прямых)

4) $A_1C_1 \cap B_1C_1 = \{C_1\}$, $AC \cap CB = \{C\}$, $A_1C_1 \subset (A_1C_1B_1)$, $C_1B_1 \subset (A_1C_1B_1)$ (по условию)
 $AC \subset (ABC)$, $CB \subset (ABC)$, $AC \cap BC = \{C\}$, $A_1C_1 \parallel AB$, $C_1B_1 \parallel CB \Rightarrow (A_1C_1B_1) \parallel (ABC)$ (по признаку параллельности плоскостей)

Задача №5

Решение:

$$P_{\text{ЕФКР}} = EP + PK + KF + FE$$

1) В $\triangle ADC$: $AB=PD$, $DK=KC$ (по условию) $\Rightarrow PK$ – средняя линия (по определению) $\Rightarrow PK \parallel AC$, $PK = \frac{1}{2} AC = 8 \text{ см}$ (по свойству средней линии).

2) В $\triangle ABC$: $AE=EB$, $BF=FC$ (по условию) $\Rightarrow EF$ – средняя линия $\Rightarrow$
 $EF = \frac{1}{2} AC = 8 \text{ см}$ $EF \parallel AC \Rightarrow PR=EF$;

3) В $\triangle ABD$: EP – средняя линия (по определению) $\Rightarrow EP \parallel BD$ и $EP = \frac{1}{2} BD = 5 \text{ см}$ }
 4) В $\triangle BDC$: FK – средняя линия (по определению) $\Rightarrow FK \parallel BD$ и $FK = \frac{1}{2} BD = 5 \text{ см}$ }

$$FK = \frac{1}{2} BD = 5 \text{ см}$$

$\Rightarrow EP=FK$;

$$P_{\text{ЕФКР}} = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 5 = 16 + 10 = 26 (\text{см})$$

Ответ: 26(см).

Из анализа этой группы задач получаем, что задачи на готовых чертежах не только являются средством реализации мыслительной операции перекодирования информации, а по своему содержанию являются средством реализации установления связи между различными разделами математики, что тоже

способствует пониманию материала. Ведь одним из путей создания условий для достижения учащимися понимания материала, как сказано в п.1.3., является преднамеренная и целенаправленная работа по установлению связей внутри материала.

II. Задачи, требующие переформирования условия, интерпретации полученного решения.

1).

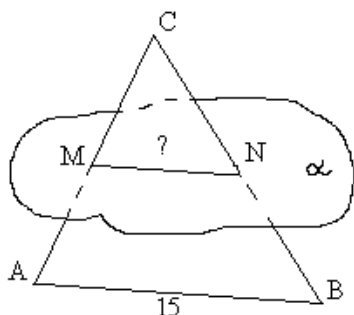


Рис.36.

2)

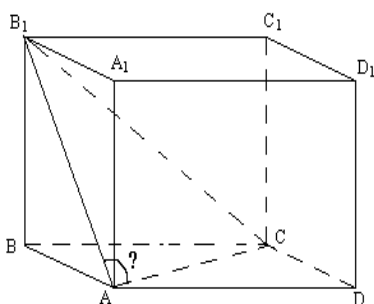


Рис.37.

3)

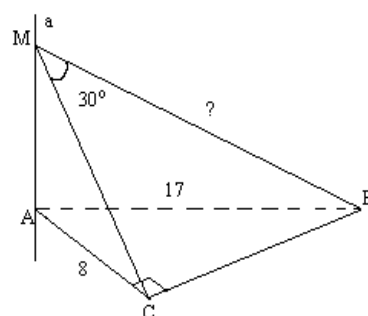
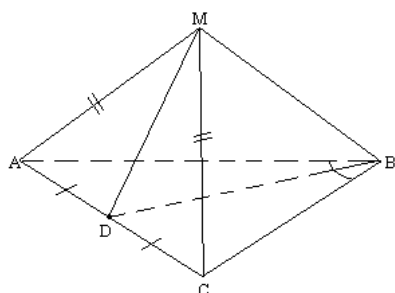


Рис.38.

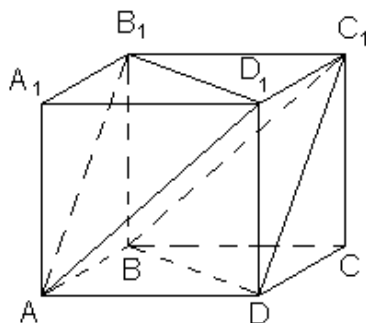
4)



Доказать: $(AMC) \perp (DMC)$.

Рис.39.

5)

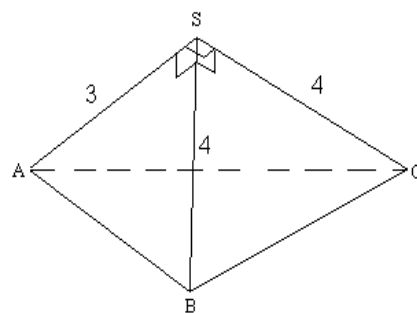


$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб

Доказать: $(ABC) \perp (A_1 B_1 C_1)$.

Рис.40.

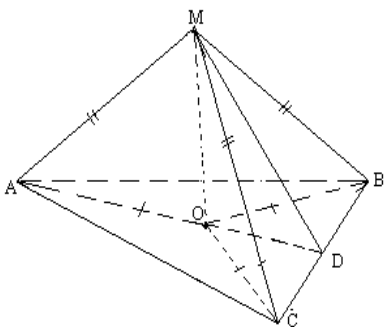
6)



V_{SABC} ?

Рис.41.

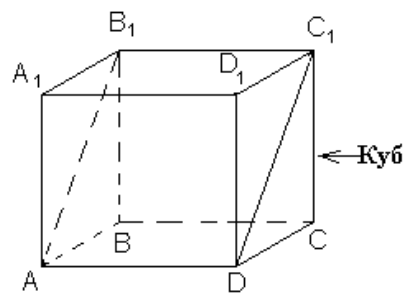
7)



Доказать: $(AMD) \perp (ABC)$.

Рис.42.

8)



Доказать: $AB_1 C_1 D$ – квадрат.

Рис.43.

Решение задач.

Задача №1. {Получение следствий из условия}.

Решение: $MN \parallel AB$ (по условию) $\Rightarrow \angle CMN = \angle CAB$, $\angle CNM = \angle CBA$ (по свойству параллельных прямых) (*) $\Rightarrow \triangle CMN$ подобен $\triangle CAB$ (по первому признаку подобия) $\Rightarrow \frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{1}{3} \cdot AB = \frac{15}{3} = 5(\text{см})$

Ответ: 5(см)

Задача №2. {Получение следствий из условия}.

Решение: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб (по условию) $\Rightarrow$ Все грани – квадраты (по свойству куба) $AB_1 = B_1 C = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \triangle AB_1 C$ – равносторонний (по определению) $\Rightarrow \angle B_1 AC = 60^\circ$ (по свойству равностороннего треугольника)

Задача №3. {Получение следствий из условия}.

Решение:

1) $a \perp (ABC)$ – по условию $\Rightarrow a \perp AC$, $a \perp AB$, $a \perp BC$ (по свойству прямой перпендикулярной к плоскости);

2) $a \perp AC$, $a \perp BC \Rightarrow MC \perp BC$ (по теореме о трёх перпендикулярах) $\Rightarrow \triangle ABC$ – прямоугольный (по определению);

3) $BC = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15$

4) BC – катет, лежит против $\angle BMC = 30^\circ \Rightarrow MB = 15 \cdot 2 = 30(\text{см})$

Ответ: 30(см)

Задача №4. {Получение следствий из условия} и {замена требования достаточными условиями}.

Решение:

1) $AD = DC$, $\triangle AMC$ – равнобедренный $\Rightarrow MD \perp AC$ (по свойству равнобедренного треугольника);

2) $\triangle ABC$ – равнобедренный, BD – биссектриса (по признаку) $\Rightarrow BD$ – высота $BD \perp AC$ (по свойству равнобедренного треугольника);

$MD \subset MDB, BD \subset MDB, AC \subset MAC \Rightarrow AMC \perp BMD$ (по теореме перпендикулярности плоскостей);

$AC \perp MD, AC \perp BD \Rightarrow AC \perp BMD$ (по теореме перпендикулярности прямой и плоскости).

Задача №5. {Получение следствий из условия} и {замена требования достаточными условиями}.

Решение: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб (по условию) $\Rightarrow$ Все грани – квадраты (по свойству куба) $\Rightarrow$ грани параллельны и равны (по свойству) $\Rightarrow$

а) $(AA_1 B_1) \parallel (D_1 C_1 C), BC_1 D_1$ – секущая плоскость $\Rightarrow BC_1 \parallel AD_1$ (по свойству параллельных плоскостей);

б) $(A_1 B_1 A) \parallel (D_1 C_1 D), B_1 C_1 D A$ – секущая их плоскость $\Rightarrow B_1 A \parallel C_1 D$ (по свойству параллельных плоскостей)

из а) и б) $\Rightarrow (B_1 D_1 A) \parallel (BC_1 D)$ (по признаку параллельности плоскостей).

Задача №6. {задача на переформулирование, изменение структуры задачи. За счет этого удастся найти более рациональное решение}.

Решение:

$$1) V = \frac{1}{3} SH;$$

$$AS \perp SB,$$

2) $SB \perp SC$, (по условию) $\Rightarrow AS \perp (SCB)$ (по признаку прямой перпендикулярной к плоскости)
 $AS \perp SC$

3) $AS \perp SCB$ (по доказанному) $\Rightarrow AS$ – высота пирамиды $SABC$, проведённая к грани SBC

$$AS = b;$$

4) $SB \perp SC$ (по условию) $\Rightarrow \Delta BSC$ – прямоугольный $\Rightarrow S_{SBC} = \frac{1}{2} a^2;$

$$5) V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a = \frac{a^3}{6} (\text{см}^3)$$

Ответ: $\frac{a^3}{6} (\text{см}^2)$

Комментарии: любую из боковых граней можно рассмотреть как основание пирамиды, тогда не принадлежащее ей боковое ребро окажется высотой пирамиды.

Задача №7 {замена требования на достаточное условие: для того, чтобы доказать перпендикулярность плоскостей AMD и ABC , достаточно доказать перпендикулярность прямой $МОС \subset (AMD)$ и (ABC) }.

Решение:

- 1) $АО=ОВ=ОС$ (по условию) $\Rightarrow AD$ – биссектриса ΔABC (по свойству центра вписанной окружности);
- 2) ΔOBC – равнобедренный (по определению) $\Rightarrow OD \perp BC$ и $CD=DB$ (по свойству равнобедренного треугольника);

$$3) \left. \begin{array}{l} MD \perp BC \\ BC \perp AD \\ MD \subset MAD \\ AD \subset MAD \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} BC \perp (MAD) \\ \text{(по признаку перпендикулярности)} \\ \text{прямой} \\ \text{и} \\ \text{плоскости} \end{array} \right\} \Rightarrow (MAD) \perp (ABC) \text{ (по признаку перпендикулярности плоскостей).}$$

Задача №8.

Решение:

- 1) $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб $\Rightarrow AB = A_1 B_1 = AD = A_1 D_1 = \dots = BC = B_1 C_1$
 $B_1 C_1 = AD$;
- 2) $A_1 B_1 = a\sqrt{2}$; $D C_1 = a\sqrt{2} \Rightarrow A_1 B_1 = D C_1 \Rightarrow A B_1 C_1 D$ – ромб (по признаку ромба).

$$3) \left. \begin{array}{l} A_1 A \perp (ABC) \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} AB_1 \perp B_1 C_1 \text{ (по теореме о трех перпендикулярах)} \\ \Rightarrow \angle C_1 B_1 A = 90^\circ \\ AB_1 C_1 B - \text{ромб} \end{array} \right\}$$

$$A_1 B_1 \perp B_1 C_1$$

$\Rightarrow ABC_1 D_1$ – квадрат.

Плакатиной О.И. [17] выдвигается третье требование к методике работы с задачами, обеспечивающими понимающее усвоение: использование заданий, на которых с помощью определенных вопросов, можно проверить осознанность действий учащихся.

К числу таких заданий относятся недоопределенные задачи, переопределенные задачи; «найти ошибку», «правильно ли выполнено задание...»

Недоопределенная задача – задача, в условии которой недостаточно данных для ее решения.

Переопределенная задача – задача, в условии которой больше данных, чем необходимо для ее решения. Переопределенные задачи могут быть противоречивыми (использование разных данных приводит к разным результатам) и непротиворечивыми (использование разных данных приводит к одному и тому же результату) [33].

Приводятся некоторые примеры заданий к задачам, способствующих усилению направленности на достижение понимания:

1. Перечислить все использованные при решении задачи «опорные знания».
2. Выяснить, все ли данные задачи были «задействованы» при решении.
3. Установить, при каких условиях задача имеет решение и сколько.
4. Проверить, все ли возможные при решении задачи ситуации рассмотрены.
5. Исследовать решение задачи, выяснив степень обобщенности этого решения.
6. Задание из п.2. «Выяснить, все ли данные задачи были «задействованы» при решении» может быть использовано для следующей группы задач:

III. Задачи (недоопределенные и переопределенные).

Существует ряд исследований, посвященных вопросам решения учащимися не только правильно сформулированных задач, но и задач с недостающими данными, с лишними данными, с противоречивыми данными. Но такие задачи решаются крайне редко из-за недостатка времени. Между тем нет необходимости для этого составлять задачи и выделять специальные уроки на их решение. Можно использовать задачи из школьного учебника, несколько изменив их, а работу по решению задач с измененными условиями полезно в основном проводить в форме устных или полуписьменных упражнений [16].

По выражению Ю.М. Колягина [21], предлагая учащимся задачу с избыточной или неполной информацией, мы воспитываем у них готовность к практической деятельности.

1).

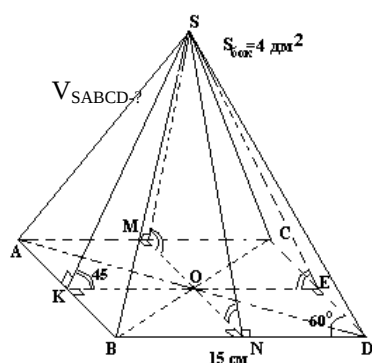


Рис.44.

2).

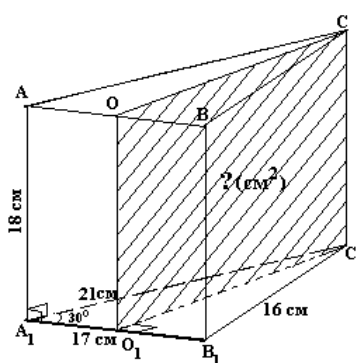


Рис.45.

3).

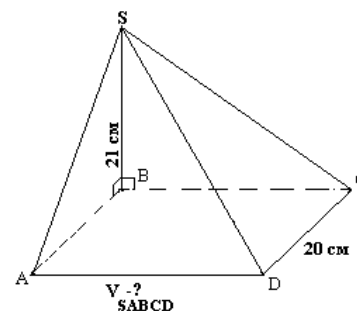


Рис.46.

4).

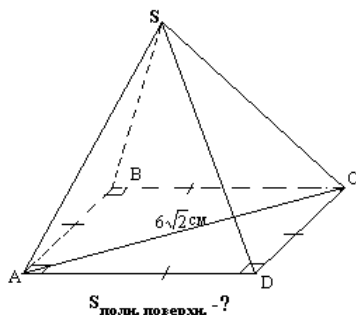


Рис.47.

5).

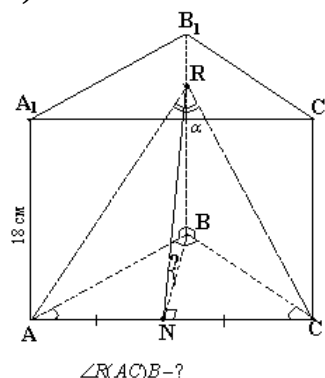


Рис.48.

Задачи составлены автором данной работы.

Особенность задачи №1 заключается в том, что она содержит избыточные противоречивые данные [31]. Предполагается, что если решать ее только одним способом, то этой особенности можно и не заметить.

Вместо приведенного задания или в дополнении к нему можно дать задание (после решения одним способом) проверить, все ли данные задачи были использованы. Выяснится, что при решении одним способом не используется величина угла наклона боковых ребер к плоскости основания, а при решении вторым способом – боковая поверхность пирамиды. Следовательно задача содержит избыточные данные. При решении обоими способами получаются разные ответы, что и приводит к противоречивости данных задачи [33].

То же самое можно сказать про задачу №2. Если при решении первым способом, где не используется величина угла в треугольнике, найти высоту C_1O_1 треугольника $A_1B_1C_1$, то получим результат отличный от результата, который получен при учете угла $\angle C_1A_1B_1 = 30^\circ$. Задача тоже является противоречивой (переопределенной).

Задача №3 является недоопределенной, так как для нахождения площади не хватает данных. В дополнении к этой задаче (такого типа) можно дать задание, дополнить задачу, чтобы ее решить. Какие варианты возможны (работа с чертежом).

Аналогичной задаче №3 является задача №4, в которой для нахождения полной поверхности пирамиды необходимо знать, чему равно боковое ребро.

Задача №5 является переопределенной. Ребра пирамиды, равные восемнадцати сантиметрам служат лишь отвлечением. Если решать способом, используя эти данные, к результату это не приведет.

В статье О.И. Плакатиной [31] предлагается обратить внимание на такие задачи, особенности которых побуждают учащихся к выполнению действий, лежащих в основе процесса понимания. К такому классу задач относятся задачи, «требующие» перевода с одного языка на другой. Мы счита-

ем, что все задачи на готовых чертежах как раз и относятся к этому классу, так как при их решении совершается переход от графического языка на символический. То есть действие «кодирования», «перекодирования» информации. А действия «кодирования», «перекодирования» информации – важные средства раскрытия ее смысла [31] поэтому то необходимо специально обучать этим действиям.

IV. «Провокационные» задачи.

Это еще один класс задач, за счет решения которых достигается понимание.

Таким термином [31] обозначает задачи, в которых автором преднамеренно допущена ошибка. При попытке решения таких задач ученик может столкнуться с различными ситуациями: задача не имеет решения и необходимо разобраться в причине, по которой не удастся найти решение; формально решение задачи может быть найдено, но анализ условия показывает, что описанные в задаче объекты не существуют.

В статье Зайкина М.И. [17] задачи такого класса называют задачами «провоцирующего характера».

К задачам «провоцирующего характера» относятся все такие задачи, условия которых содержат упоминания, указания, намеки или другие побудители, подталкивающие учащегося к выбору ошибочного пути решения или неверного ответа. В методической литературе такие задачи еще называют задачами – ловушками. Эти задачи способствуют воспитанию критичности мышления, приучают к анализу воспринимаемой информации, ее разносторонней оценки.

Таким образом, ученик, решая следующую задачу, будет тщательно анализировать условие задачи. Не делая поспешных выводов [33].

Приведем задачи на готовых чертежах, которые относятся к этому классу задач. Задачи составлены автором данной работы.

«Провокационные» задачи.

Все «провокационные» задачи составлены автором.

1)

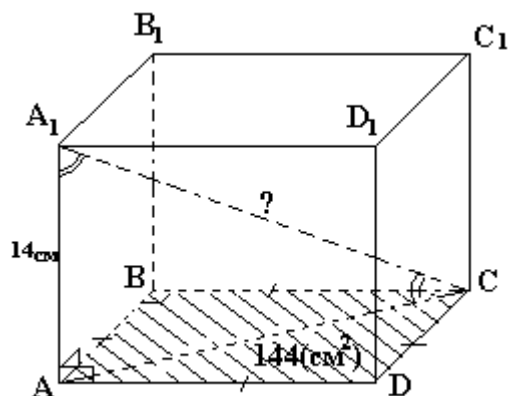
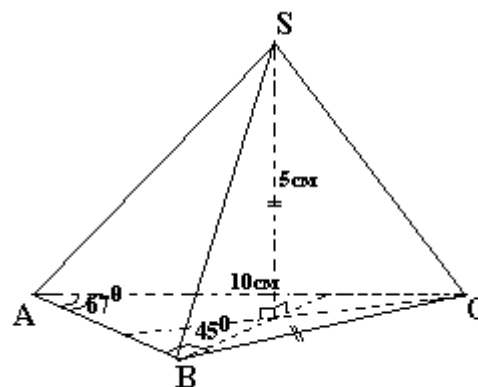


Рис.49.

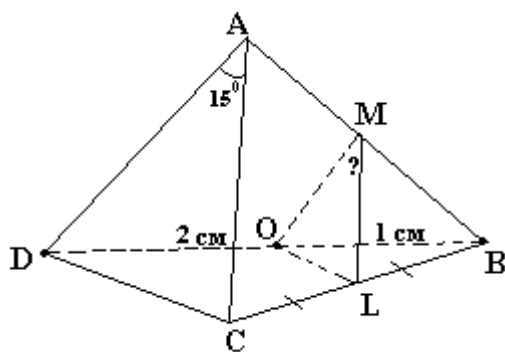
2)



$V_{ABCD}=?$

Рис.50.

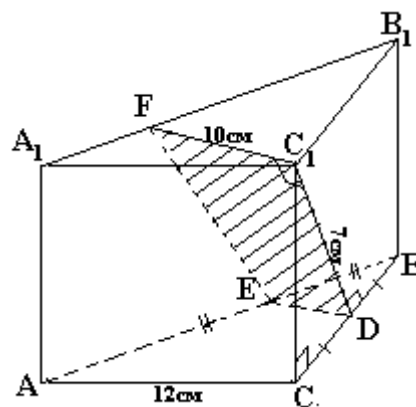
3)



$(ACD \parallel MOL)$

Рис.51.

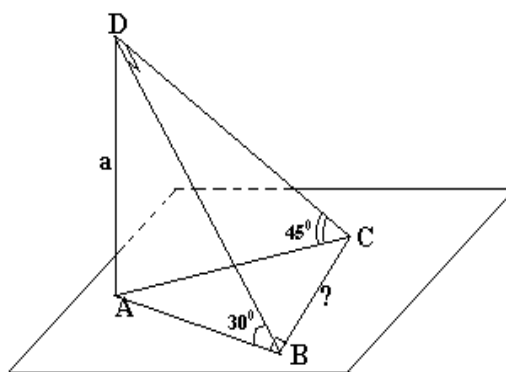
4)



5)

$SFC_1DE=?$

Рис.52.



$a \perp (ABC)$

Рис.53.

При решении задачи №1, ученик должен обнаружить, что если задана площадь основания, которое является квадратом, можно вычислить диагональ. Но она не будет равна AA_1 (по свойству равнобедренного $\triangle AA_1C$ $AA_1=AC$). Если ученик этого не заметит, то в результате получит ошибочный результат. В задаче №2 не выполняется свойство треугольника: против большего угла лежит большая сторона, сторона BC $\triangle ABC$ лежит против угла большего угла ABC , но BC меньше чем AC .

Если в задаче №3 не обратить особое внимание на чертежи, а использовать главное условие: параллельность ADC и MO , то сразу же задача будет решена $\angle OML = 15^\circ$. Но если разобраться с данными чертежа, выяснится, что вовсе это плоскость не параллельна. Зная, что из точки на прямую можно провести единственный перпендикуляр, то тратить силы на решение задачи №4 не придется.

Задачу №5 формально можно решить, используя свойства прямоугольного треугольника. Однако анализ данных треугольника на плоскости показывает, что треугольник ABC не существует (гипотенуза меньше катетов).

Таким образом, сделаем вывод, что задачи на готовых чертежах не уступают текстовым задачам по геометрии. Помимо того, что эти задачи включают те действия необходимые для понимания учащимися материала, которые входят в состав текстовых задач, каждая задача на готовых чертежах содержит в себе одно из действий (перекодировка), являющихся фундаментом для развития понимающего усвоения материала.

Для наибольшей эффективности учитель должен вести работу по решению таких задач. Поэтому нужно ознакомиться со структурой процесса решения задач.

2.3. Структура процесса решения задач на готовых чертежах

Как решать задачи на готовых чертежах?

...если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!

Д. Пойа.

Вопросам обучения решения задач посвящали свои труды многие авторы, в частности К.С. Богушевский [7] утверждает, что статьи, посвященные проблеме решения геометрических задач, а именно наиболее ответственной части этой проблемы – вопросам поисков путей к решению геометрических задач, помещались в журнале «Математика в школе». За один 1961 год в первых четырех номерах журнала на эту тему помещены следующие статьи: №2 – И.И. Дырченко, О воспитании у учащихся творческого подхода к решению задач; Д.Ф. Изаак, Выяснение формы геометрической фигуры при решении геометрических задач по геометрии; в №3 – М.Н. Трубецкой, Развитие технического изобретательства учащихся в процессе обучения геометрии; в №4 – М.В. Волович, Использование задач при решении теоретических вопросов.

На эту же тему помещались статьи в сборнике «Математика в школе», изд. «московский рабочий», 1951; в «Сборнике статей по вопросам преподавания геометрии в средней школе», под редакцией П.В. Стратилова, Учпедгиз, 1958.

Но, что касается структуры процесса решения задач, то этой проблеме уделяют особое внимание Пойа Д. [36], Стойлова Л.П. [54], Фридман Л.М. [56].

Фридман Л.М. [4] предлагает следующую структуру процесса решения задач:

- 1-й этап – анализ задачи;
- 2-й этап – схематическая запись задачи;
- 3-й этап – поиск способа решения задачи;
- 4-й этап – осуществление решения задачи;
- 5-й этап – проверка решения задачи;

6-й этап – исследование задачи;

7-й этап – формулирование ответа задачи;

8-й этап – познавательный анализ решения задачи.

Пойа Д. [36] выделяет четыре ступени в процессе решения задачи:

1. Понимание постановки задачи;
2. Составление плана решения;
3. Осуществление плана;
4. Анализ решения.

Стойлова Л.П. [54] представляет этапы:

1. Анализ задачи;
2. Поиск и составление плана решения;
3. Осуществление плана решения задачи;
4. Проверка решения задачи;
5. Моделирование в процессе решения задач.

Как говорят все эти авторы, структура процесса решения подходит для любой задачи.

А если мы откроем литературу, посвященную решению именно геометрических задач, то, как правило, не найдем в ней четких рекомендаций. В лучшем случае рассматриваются отдельные виды задач и даются специфические методы их решения, как утверждает О.С. Гуртова [12].

В рассмотренной литературе, в основном, авторы высказывают мнение по поводу задач на готовых чертежах и делятся опытом использования, а как осуществлять решение задач на готовых чертежах, ничего не сказано.

В сущности, структура процесса решения задач на готовых чертежах сводится к структуре процесса решения текстовой задачи. Но, следует отметить, что особое внимание должно уделяться чтению чертежа, тем более, когда речь идет о стереометрической задаче. Поэтому структура процесса решения задач на готовых чертежах будет выглядеть несколько иначе. Вышеизложенные структуры процесса решения задач похожи между собой, но за основу мы взяли структуру процесса решения задач, составленную Фридма-

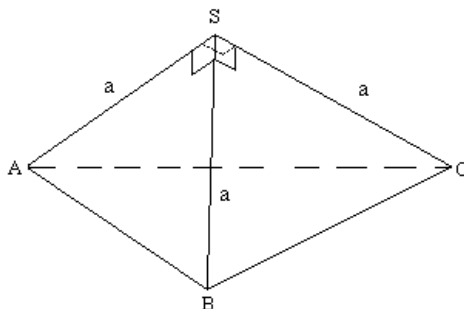
ном Л.М., Турецким Е.Н., так как считаем, что авторы представили наиболее подробную структуру. С учетом специфики задач на готовых чертежах меняются первые два этапа. При работе с задачами на готовых чертежах первым делом стоит задача прочитать чертеж и составить символическую запись условия и требования задачи. На первых этапах осуществляется мыслительная операция перекодирования информации из графической формы (чертеж) в символьную. Как уже говорилось ранее, именно действие перекодировки способствует пониманию учащимися материала. При решении текстовых задач по геометрии происходит трансформация словесной формулировки задачи в чертеж, а использование обратной операции не предусмотрено. Поэтому необходим этап трансформации из графической формы (чертеж) в словесную формулировку задачи.

Структура процесса решения задач на готовых чертежах:

- 1-й этап – анализ чертежа задачи;
- 2-й этап – составление краткой записи условия задачи;
- 3-й этап – формулировка задачи на естественном языке;
- 4-й этап – поиск способа решения задачи;
- 5-й этап – осуществление решения задачи;
- 6-й этап – проверка решения задачи;
- 7-й этап – исследование задачи;
- 8-й этап – формулирование ответа задачи;
- 9-й этап – анализ решения задачи.

Покажем применение данной структуры процесса решения задач на готовых чертежах и убедимся, что ее можно использовать при решении.

1.



$V_{SABC}=?$

Рис.54.

1. Этап: Анализ чертежа задачи.

Данная задача является задачей с параметром (длина ребра выражается буквенными данными) на вычисление объема многогранника.

За счет данных чертежа, использования определений многогранников (пирамида, призма, параллелепипед и т.д.) видно, что речь в задаче идет о пирамиде. Известны ребра пирамиды, равные между собой, попарно перпендикулярны. Эти ребра пирамиды выражаются параметром a . Очевидно, что a — может быть любым положительным числом, $a > 0$.

Составим краткую запись условия задачи.

2. Этап: составление краткой записи условия задачи:

Дано: $SABCD$ —треугольная пирамида.

$SA=SB=SC=a$

$AS \perp SB, SB \perp SC, AS \perp SC$

Найти: V_{SABC} .

3. Этап: Формулировка задачи на естественном языке:

Боковые ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны и равны между собой. Найти объем пирамиды.

4. Поиск способа решения задачи.

Объем пирамиды вычисляется по формуле $V = S \cdot h$, S —площадь основания пирамиды (площадь $\triangle ABC$), h —длина высоты пирамиды.

Приняв за основание пирамиды $\triangle ABC$, можем найти стороны основания, зная, что боковые грани являются равнобедренные прямоугольные треугольники. Получаем вывод, что в основании лежит равносторонний тре-

угольник. Площадь равностороннего треугольника можем найти, пользуясь формулой $S = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$. Остается найти длину высоты пирамиды.

Зная, что ребра пирамиды равны, то основание высоты есть центр описанной окружности около основания пирамиды. Можно найти длину высоты, зная длину радиуса описанной окружности и ребро пирамиды (формула описанной окружности известна).

5. Этап: Осуществление решения задачи.

1) $V = Sh$;

2) $\left. \begin{array}{l} AB = a\sqrt{2} \\ BC = a\sqrt{2} \\ AC = a\sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC - \text{равнобедренный (по определению)}$

3) $S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$;

4) $AS = SB = SC = a$ (по условию) $\Rightarrow O$ - центр описанной окружности около основания пирамиды. $\Rightarrow$

5) $AO = OC = OB = \frac{(a\sqrt{2})^3}{4S_{\triangle ABC}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;

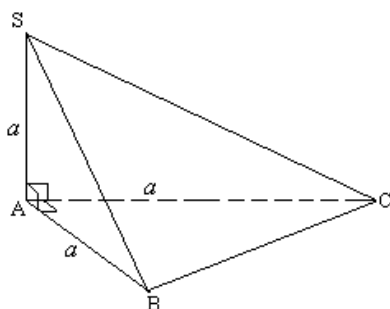
6) $SO = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$;

7) $V = \frac{1}{3} \cdot Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{6}$;

6. Этап: Проверка решения задачи.

Эту задачу можно решить другим способом.

Так как боковые ребра данной пирамиды попарно перпендикулярны, то любое из них перпендикулярно плоскости грани, в которой лежат два других



ребра. Любую из боковых граней можно рассмотреть как основание, тогда не принадлежащее ей боковое ребро можно считать высотой пирамиды.

Решение:

1) $V = \frac{1}{3} SH$;

- $AS \perp SB$,
- 2) $SB \perp SC$, (по условию) $\Rightarrow AS \perp (SCB)$ (по знаку прямой перпендикулярной к $AS \perp SC$ плоскости);
- 3) $AS \perp SCB$ (по доказанному) $\Rightarrow AS$ – высота пирамиды $SABC$, проведённая к грани SBC
 $AS = b$;
- 4) $SB \perp SC$ (по условию) $\Rightarrow \Delta BSC$ – прямоугольный $\Rightarrow S_{SBC} = \frac{1}{2} a^2$;
- 5) $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot a = \frac{a^3}{6} (\text{см}^3)$.

7. Этап. Исследование задачи.

В этой задаче речь идет о пирамиде, в основании которой лежит равно-
 сторонний треугольник. Но если бы в основании пирамиды лежал равно-
 бедренный прямоугольный треугольник, то решение задачи первым спо-
 собом оказалось более громоздким. Однако, используя решение вторым
 способом (переформулирование, изменение структуры задачи) удастся
 найти более рациональное решение.

8. Этап. Ответ: $V = \frac{a^3}{6} (\text{см}^3)$.

9. Этап: Анализ решения задачи.

При решении задачи первым способом использовались:

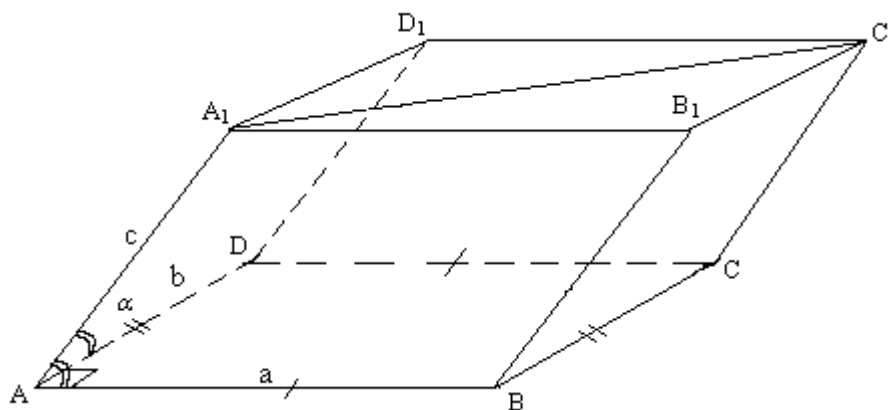
- определение пирамиды;
- формула объема пирамиды;
- определение прямоугольного треугольника;
- теорема Пифагора;
- определение равностороннего треугольника;
- формула площади треугольника;
- свойства пирамиды (если ребра пирамиды равны, то основание высоты
 есть центр описанной окружности);
- формула вычисления радиуса описанной окружности.

При решении задачи вторым способом использовались:

- определение пирамиды;
- формула объема пирамиды;

- определение высоты пирамиды;
- определение прямой перпендикулярной к плоскости;
- формула площади треугольника.

2.



$V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} = ?$

Рис.55.

1. Этап: Анализ чертежа задачи.

Данная задача является задачей с параметрами (длина сторон основания выражается буквенными данными) на вычисление объема многогранника. Установление возможных областей изменения параметров

a, b, c – длины сторон рёбер $\Rightarrow a > 0, b > 0, c > 0$

α – угол наклона ребра c к ребру a , и ребру c $\Rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$

За счет данных чертежа, использования определений многогранников (пирамида, призма, параллелепипед и т.д.) видно, что речь в задаче идет о параллелепипеде.

Составим краткую запись условия задачи.

2. Этап: составление краткой записи условия задачи:

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ параллелепипед, $AB=a$, $AD=b$, $AA_1=c$, $AB \perp AD$,
 $\angle AA_1 B = \angle AA_1 D = \alpha$

Найти: V .

3. Этап: Формулировка задачи на естественном языке:

В параллелепипеде длины трех ребер, выходящих из общей вершины, a , b и c , ребра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α . Определить объем параллелепипеда.

4. Этап: Поиск способа решения задачи.

Объем параллелепипеда можно вычислить, используя формулу $V = S \cdot h$.

S – площадь основания параллелепипеда, h – его высота.

Приняв за основание грань $ABCD$, в которой ребра AB и AD взаимно перпендикулярны, мы найдём площадь основания (см. п.2 в 4 этапе)

Остаётся найти длину h высоты параллелепипеда

Нужно провести её так, чтобы можно было её связать с известными элементами параллелепипеда. Поэтому удобнее провести высоту из вершины A_1 (производится дополнительное построение).

Нужно установить в первую очередь положение основания высоты. Где она будет находиться? На ребре AB и AD она не будет находиться, так как AA_1 одинаково наклонено к этим ребрам.

Т.к. из чертежа видно, что угол наклона – острый $\Rightarrow$ Основание должно быть внутри прямоугольника $ABCD$

Чтобы связать искомую высоту с данными отрезками и определить положение основания высоты, опустим из неё перпендикуляры на ребра AB и AD . Получим четырёхугольник. Используя все данные, найдём, чему равна высота (см. п.7 этап 4).

5 Этап: Осуществление решения задачи.

1. $V = S \cdot h$

2. $S = AB \cdot AD = a \cdot b$

3. Пусть $A_1O \perp (ABCD) \Rightarrow A_1O = h$

4. Пусть $OM \perp AB$, $ON \perp AD \Rightarrow AMON$ – прямоугольник (по признаку)

5. OM – проекция A_1M , ON – проекция A_1N (на плоскость основания)

$ON \perp AD$, $OM \perp AB$ (по построению) $\Rightarrow A_1M \perp AB$, $A_1N \perp AD$ (по теореме о трёх перпендикулярах) $\Rightarrow \Delta A_1AN$ и ΔA_1AM – прямоугольные (по определению)

$A_1A = c$ – общая, $\angle A_1AM = \angle A_1AN = \alpha$ (по условию) $\Rightarrow \Delta A_1AN = \Delta A_1AM$ (по признаку равенства прямоугольных треугольников) $\Rightarrow AM = AN$ (по свойству равенства треугольников) $\Rightarrow AM = AA_1 \cdot \cos \alpha = c \cdot \cos \alpha$ (*)

6. $AM = AN$, $AMON$ – прямоугольник (по доказанному) $\Rightarrow AMON$ – квадрат (по признаку) $\Rightarrow AO = AM\sqrt{2} = c\sqrt{2} \cdot \cos \alpha$ (**)

7. $A_1O \perp (ABCD)$ (по построению) $\Rightarrow \Delta A_1AO$ – прямоугольный
 $A_1O^2 = AA_1^2 - AO^2 = c^2 - 2c^2 \cdot \cos^2 \alpha = c^2(1 - 2\cos^2 \alpha) = -c^2 \cdot \cos 2\alpha$ (***)

$$A_1O = c\sqrt{-\cos 2\alpha} \quad h = c\sqrt{-\cos 2\alpha}$$

$$8. V = a \cdot b \cdot c\sqrt{-\cos 2\alpha}$$

6 Этап: Проверка решения задачи

В данном случае проверка решения сводится к тому, чтобы убедиться, что по найденной формуле действительно можно найти такое число (V), которое выражает объем и принадлежит области определения (объем выражается только положительными значениями).

Должно соблюдаться лишь одно условие: $V > 0$. Как показано на чертеже угол острый, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ проверим будет ли выполняться условие $V > 0$:
 $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha > 0$, при $45^\circ < 2\alpha < 90^\circ \cos 2\alpha < 0$

Если $0^\circ < \alpha < 45^\circ V < 0$

7 Этап: Исследование задачи

1. Из чертежа заданный угол α острый.

Если бы он был тупой, то это означало бы, что заданные три ребра параллелепипеда выходили бы не из вершины A , а из вершины C .

Тогда основание O высота параллелепипеда находилась бы вне основания $ABCD$.

Тогда бы вместо формулы (*) получили $\tilde{NM} = CC_1 \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = -c \cdot \cos \alpha$

Формула (**) принимает вид $CO = -c \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \alpha$

Формула (***) имела бы тот же самый вид, что и при $\alpha < 90^\circ$ и окончательный ответ был точно таким же, какой мы получили выше.

2. Наличие в ответе знака «минус» под квадратным корнем приводит к определению пределов, в каких изменяется угол α .

По свойству плоского угла трёхгранного угла $\Rightarrow$ величина каждого плоского угла трёхгранного угла меньше суммы величин двух других его плоских углов.

Трёхгранный угол при вершине А: два плоских угла имеют величину α , а третий – прямой $\Rightarrow 90^\circ < 2\alpha \Rightarrow \alpha > 45^\circ$

Но сумма величин всех плоских углов трёхгранного угла меньше 360°

Значит $2\alpha + 90^\circ < 360^\circ$, $\alpha < 135^\circ$

Следовательно при $45^\circ < \alpha < 135^\circ$ $\cos 2\alpha < 0$ и $-\cos 2\alpha > 0$

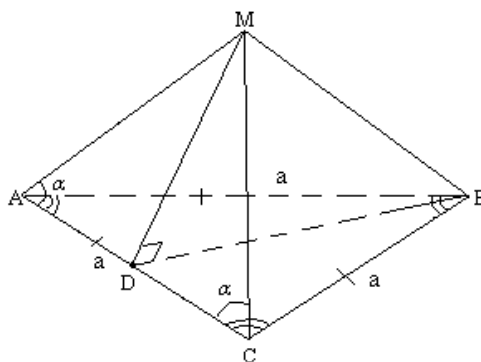
Полученный ответ $V = a \cdot b \cdot c \sqrt{-\cos 2\alpha}$ имеет смысл

8 Этап: Ответ: $V = a \cdot b \cdot c \sqrt{-\cos 2\alpha}$.

9 Этап: Анализ решения задачи

При решении подобных задач важно предварительно при анализе задачи установить области изменения параметров если задача с параметрами (длина элементов фигуры выражается буквенными данными), не всегда такое возможно, поэтому каждый шаг нужно анализировать.

3.



$V_{M(AC)B}=?$

Рис.56.

1 Этап: Анализ чертежа задачи.

В данной задаче речь идёт о пирамиде, объём которой требуется найти.

Из данных чертежа видно, что в основании пирамиды лежит правильный треугольник.

Известен линейный угол трёхгранного угла $M(AC)B$, который является прямым.

Стороны правильного треугольника в основании выражаются параметрами a .

Очевидно, что a – может быть любым положительным числом $a > 0$

Составим краткую запись условия задачи.

2. Этап: составление краткой записи условия задачи:

Дано: $MABC$ – пирамида, $AB = BC = AC = a$, $\angle MOC = 90^\circ$, $\angle MAB = \angle MBA = \alpha$,

$\angle CAB = \angle CBA = \angle ACB$

Найти: V_{MABC}

3 Этап: Формулировка задачи на естественном языке:

Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a . Линейный угол трёхгранного угла $M(AC)B$ прямой. Требуется найти объём пирамиды.

4 этап: Поиск способа решения задачи

5 Этап: Осуществление решения задачи

7 Этап: Исследование задачи

Эти три этапа процесса решения в данном случае удобно производить совместно:

Формула нахождения объёма пирамиды нам известна

1. $V = \frac{1}{3} S \cdot h$, где S – площадь ΔABC , а $h = MO$

2. Т.к. ΔABC – правильный со стороной a , то $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

3. ΔAOM – прямоугольный, $\angle MAB = \angle MBA$ (по условию) $\Rightarrow \Delta AMB$ – равнобедренный $\Rightarrow OM$ – медиана: $AO = \frac{a}{2}$, $h = OM = AO \cdot \operatorname{tg} \angle OAM = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$,

$$V = \frac{a^3 \cdot \operatorname{tg} \alpha \sqrt{3}}{24}$$

6 Этап: проверка.

В данном случае решение сводится к тому, чтобы убедиться, что по найденной формуле действительно можно вычислить V , такое, которое принадлежит области его определения.

Очевидно, что должно соблюдаться одно условие $V > 0$, при $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $\operatorname{tg} \alpha > 0$

7 Этап: Исследование задачи:

Можно исследовать угол наклона грани к основанию ($<90^\circ$, $>90^\circ$)

8 Этап: Ответ: $V = \frac{a^3 \cdot \operatorname{tg} \alpha \sqrt{3}}{24}$

9 Этап: Анализ решения задачи:

При анализе задачи нужно устанавливать области изменения параметров, если задача является задачей с параметрами (длина элементов фигуры выражается буквенными данными).

При анализе решения полезно устанавливать возможность обобщения задачи, выявлять ее особенности, сопоставлять решение задачи с ранее решенными, выявлять недостатки решения, искать другие способы, устанавливать и закреплять в памяти тех приемов, которые были использованы при решении [56].

Не останавливаясь на достоинствах и недостатках структуры процесса решения задачи на готовых чертежах, можно отметить лишь, что при обуче-

нии решению геометрических задач, особенно на первых порах, следует уделить самое пристальное внимание 1-му этапу, так как из-за неполного или неправильного анализа чертежа задачи изменится ход решения остальных этапов. После выполнения этого этапа можно переходить ко 2-му и 3-му этапам. Третий этап лучше трактовать как поиск метода решения задачи, так как именно здесь учащиеся чаще всего и теряются: они не знают, как использовать условие, с чего начать.

В некоторых случаях несколько этапов процесса решения задачи удобно производить совместно.

Мы попытались составить структуру процесса решения задач на готовых чертежах и советуем учителю, который воспользуется нашей идеей, уделить особое внимание первым этапам этой структуры, но и про остальные этапы не стоит забывать.

Подведем итоги второй главы. Используя задачи такого типа можно решить следующие проблемы: умение решать геометрические задачи, формирование математического мышления, ошибочные ассоциации и т.д. А в целом решение этих проблем способствует пониманию учащимися материала.

Заключение

В данной работе в соответствии с высказанной гипотезой и выделенными частными задачами нами была изучена психолого-педагогическая и методическая литература по проблеме понимания, был проведен анализ учебников многих авторов и работ учителей, которые делятся опытом использования задач на готовых чертежах.

Результаты проведенной работы такие: были выделены основные понятия по проблеме понимания в обучении, уточнены трактовки этих понятий.

На основе анализа рассмотренных геометрических задач определили термин «задача на готовом чертеже».

При анализе литературе выяснили и постарались показать, что во многих аспектах именно использование задач на готовых чертежах может способствовать достижению учащимися понимания геометрического материала. Представили типологию задач на готовых чертежах по разным основаниям. Данная типология использовалась при прохождении педагогической практики. Велась работа по обучению решению задач на готовых чертежах.

Выделили структуру процесса решения задач на готовых чертежах.

На основе типологии был создан набор задач на готовых чертежах, которые являются средством создания условий для достижения школьниками понимания геометрического материала.

При решении задачи на готовом чертеже нужно обратить внимание на этап анализа чертежа (чтению чертежа), для этого нами было разработано электронное пособие по обучению чтению чертежей. Созданное электронное пособие нуждается в практической проверке.

Обозначенная в теме проблема понимания в обучении математике требует дальнейшего исследования.

Список литературы

1. Александров А.Д. и др. Геометрия для 10–11 классов: Учеб. Пособие для учащихся шк. и классов с углуб. изуч. математики / А.Д.Александров, А.Л. Вернер, В.И.Рыжик. – 3-е изд., перераб.— М.: Просвещение, 1992.—464 с.
2. Александров А.Д. и др. Геометрия. Экспериментальное учебное пособие для учащихся VII класса средних учебных заведений / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: МИРОС, 1994.
3. Артемов А.К. Об одной причине ошибок школьников по геометрии. // Математика в школе, 1963, №6. с. 22–25.
4. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия: учеб. для 7-9 кл. сред. шк. –М.: Просвещение, 1992.
5. Беркутова Т.В. Использование логических структур и готовых чертежей при решении задач стереометрии [Электронный курс]/- Электрон. дан. – Режим доступа: www.festival.1september.ru, свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус.
6. Бескин Н.М. Изображение пространственных фигур. М., 1971. 80 с.
7. Богушевский К.С. Вопросы преподавания геометрии в восьмилетней школе. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1964.
8. Вернер А.Л. и др. Геометрия: Учеб. Для 7 кл. общеобразоват. Учреждений / А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот. – М.: Просвещение, 1999.
9. Восканян К.В. Построение геометрических фигур, как средство развития мышления школьников [Электронный курс]/ - Электрон. дан. – Режим доступа: www.vorpsy.ru, свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус.
10. Гастева С.А., Крельштейн Б.И., Ляпин С.Е., Шидловская М.М. Методика преподавания математики/ Пособие для учителей и

- студентов педагогических институтов. УЧПЕДГИЗ – 1955. Ленинград 2-е изд.
11. Гурова Л.Л. Психологическое обоснование использования моделей при решении стереометрических задач// Математика в школе, 1989, №, с 84-97.
 12. Гуртова О.С. Некоторые приемы, облегчающие решение геометрических задач// Математика в школе, 1995, №2. с.61-65.
 13. Гусев В.А. Основная стратегия изучения курса «Геометрия 5–11» – «Я в пространстве». Методика обучения геометрии: Учеб. Пособие для студ. Высш. Пед. Учеб. Заведений / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчишина и др.; Под ред. В.А. Гусева. –М.: Издательский центр «Академия». –368с.
 14. Далингер В. А. (г. Омск). Чертеж учит думать// Математика в школе, 1990, №4. с.32–36.
 15. Демьянков В.З. Приложение общей теории интерпретации к моделированию понимания [Электронный курс]/ - Электрон. дан. – Режим доступа: www.infolex.ru, свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус.
 16. Драган З. П.К методике решения задач в IV классе// Математика в школе, 1983, №1. с.24–27.
 17. Зайкин М.И. «Провоцирующие задачи» //Математика в школе №6, 1992.с.32–36.
 18. Зайцева Г.Д. Развитие навыков решения стереометрических задач// Математика в школе, 1982, №1.с.40.
 19. Изаак Д.Ф. Поиски решения геометрической задачи// Математика в школе, 1998, №6. с 30-34.
 20. Карнацевич Л.С., Грузин А.И. Изучение работы в 6 классе// Из опыта работы./ Под. Ред. Тесленко И.Ф. –М.:Просвещение.1983.
 21. Киселев А.П., Рыбкин Н.А.Геометрия: Стереометрия: 10-11 кл.: Учебник и задачник. – М.: Дрофа, 1995.

22. Кислюк А.В. ВКР Действия интерпритации и формализации как компоненты математических методов/ кафедра математики и информатики филиала ИГПУ в г. Усть –Илимске, 2004.
23. Ковалева Г.И. Дидактический материал по геометрии для 10–11 классов. Разрезные карточки по стереометрии/ Сост. Г.И. Ковалева – Волгоград: Учитель, 2003.—128с.
24. Колягин Ю. М., Зейналов Д.С: Вопросы методики преподавания задач в обучении геометрии.
25. Кузнецов С. Н. Об устном решении задач по готовым чертежам// Математика в школе, 1970, №4. с.43.
26. Кукарцева К.И. 500 задач по геометрии в рисунках и тестах. Для средней школы 7–9 кл. – М.: ООО «АКВАРИУМ ЛТД», 2001.—128с.
27. Мерзлякова В.В. Развитие пространственного мышления на уроках математики [Электронный курс]/ - Электрон. дан. – Режим доступа: www.festival.1september.ru, свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус.
28. Оганесян В.А., Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л. Развитие математического мышления учащихся и постановка математических задач.// Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. Фак. Пед. Ин-тов/ Оганесян В.А., Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л., Саннинский В.Я. –2-е изд., перераб. И доп. –М.: просвещение, 1980. –368с.
29. Опыт реализации технологий углублённого изучения математики [Электронный курс]/ - Электрон. дан. – Режим доступа: <http://sverdlovsk-school8.nm.ru>, свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус.
30. Пикан В.В. из опыта обучения геометрии в 6 классе по учебному пособию «Геометрия, 6-10» Погорелова А.В./ М.: Просвещение, 1983.

31. Плакатина О.И. Роль математических задач как средства, обеспечивающего понимание учебного материала.// Вопросы преподавания математики и информатики в школе и вузе. Сборник научных трудов. Иркутск: Изд-во Иркутского гос.пед.ун-та,2005. –с.125.
32. Плакатина О.И. Специальная методика преподавания математики: Учебное пособие. – Иркутск, 2004. –268с.
33. Плакатина О.И. Теоретические основы методики, обеспечивающие «понимающее усвоение» [Текст], 2004.
34. Погорелов А.В. Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. Учреждений. –10-е изд. –М.: Просвещение, 2000. –383с.
35. Пойа Д. Как решать задачу. М., 1989.
36. Пойа Д. Как решать задачу.// Научно – методический журнал Квантор. –М.: «Учпедгиз»,№1, 1991. –215с.
37. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.; Наука, 1975. –389с.
38. Пономарева Е.В. Методика создания условий для понимания школьниками предельного перехода в математике: Автореферат канд. дисс. –СПб, 2003.
39. Преподавание геометрии в 6-8 классах.//Сб. статей. Сост. Гусев В.А. –М.: Просвещение, 1979, с. 53-83.
40. Рабинович Е.М. Геометрия. Задачи и упражнения на готовых чертежах. 10-11 классы [Электронный курс]/ - Электрон. дан. – Режим доступа: www.ilexa.ru, свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус.
41. Рабинович Е.М. Задачи и упражнения на готовых чертежах. 10–11 классы. Геометрия. –М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 1999.
42. Рабинович Е.М. Задачи и упражнения на готовых чертежах. 7–9 классы. Геометрия. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 1999. –56с.

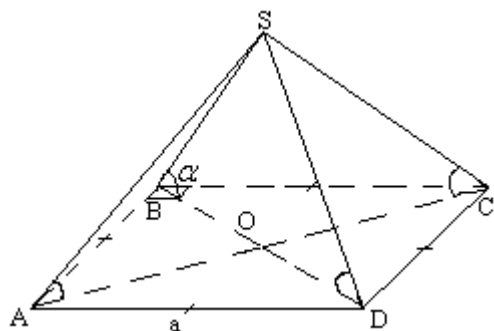
43. Рабинович Е.М. Задачи и упражнения на готовых чертежах// Математика в школе, 2004, №5, с.23-25.
44. Рабинович Е.М.. Задачи и упражнения на готовых чертежах. 10-11 классы. // Математика, 2004, №20, с.18–21.
45. Рабинович Е.М.. Задачи и упражнения на готовых чертежах. 10-11 классы. // Математика, 2004, №33, с.26–29.
46. Рабинович Е.М.. Задачи и упражнения на готовых чертежах// Математика в школе, 2004, №9, с.19-21.
47. Росинская В.В. ВКР Проблема понимания в обучении математике /кафедра математики и информатики филиала ИГПУ в г. Усть – Илимске, 2003.
48. Саврасова С.М. Система упражнений по планиметрии в IX-X классах// Математика в школе, 1987, №6. с.33–36.
49. Самойлова М.В., Салынина С.Л. Использование информационных технологий на уроках математики [Электронный ресурс] www.gmcit.murmansk.ru.
50. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: учеб. Пособие для студентов мат. Спец. Пед. Вузов и ун-тов / Г.И.Саранцев. –М.:Просвещение, 2002.—224с.
51. Славская К.А. К вопросу о роли переформулирования в решении задач. // Доклады АПН РСФСР, 1960, №1.
52. Смирнова И.М. Геометрия: Учеб. Пособие для 10–11 кл. естеств.-науч. профиля обучения/ И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. –М.: Просвещение, 2001.
53. Солодуха Е.В. ВКР Роль педагогических технологий в создании условий для достижения учащимися понимания в процессе обучения математике / кафедра математики и информатики филиала ИГПУ в г. Усть –Илимске, 2004.
54. Стойлова Л. П. Математика: Учебник для студ. высш. пед. учеб. заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2002. –424с.

55. Стратилатов. Сборник статей по вопросам преподавания геометрии в средней школе, –М.: УЧПЕДГИЗ, 1958. с.75-84.
56. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Сущность и структура решения математических задач//Как научиться решать задачи: Пособие для учащихся ст. классов.-3-е изд., дораб.—М.: Просвещение, 1989. –192с.
57. Черникова Л.Ф. Упражнения на готовых чертежах// Математика в школе, 1994, №6. с. 4–7.
58. Шарыгин И.Ф. Геометрия 10–11 кл.: Учеб. для общнообразоват. учеб. заведений – М.: Дрофа,1999.
59. Шарыгин И.Ф. Геометрия 7–9 кл.: Учеб. для общнообразоват. учеб. заведений – М.: Дрофа, 2000.
60. Ястребинецкий Г.А. Общие методические рекомендации по использованию «упражнений по планиметрии на готовых чертежах» [Электронный ресурс] [http:// schools/keldysh/ru](http://schools/keldysh/ru).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

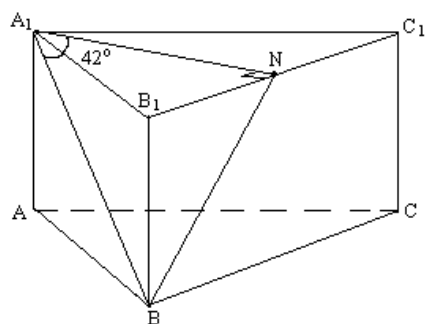
Набор задач на готовых чертежах.

I. Задачи на выявление связей между разделами математики.



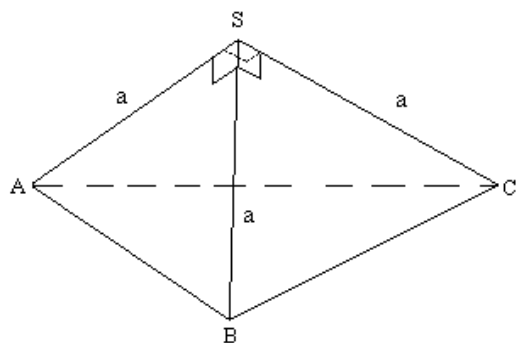
Доказать: $MO \perp (ABC)$.

Рис.П.1.1.



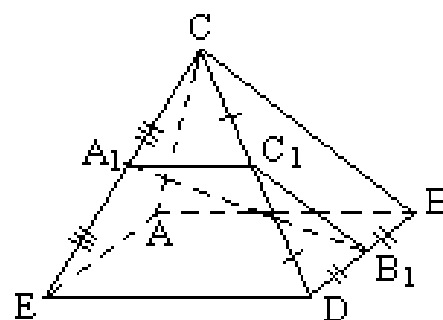
$A_1B \hat{=} (B_1BC)$ -?

Рис.П.1.2.



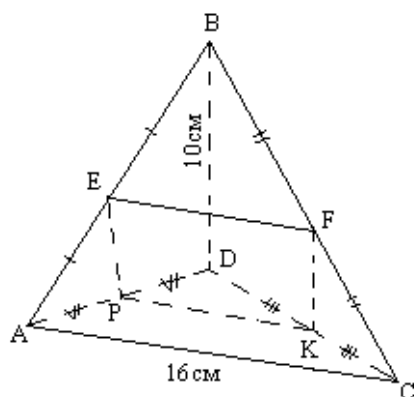
V_{SABC} -?

Рис.П.1.3



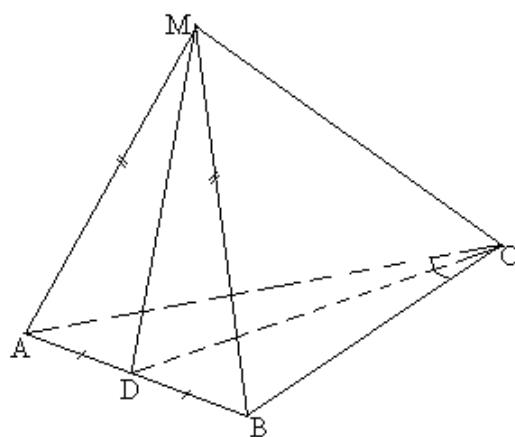
Доказать: $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$.

Рис.П.1.4.



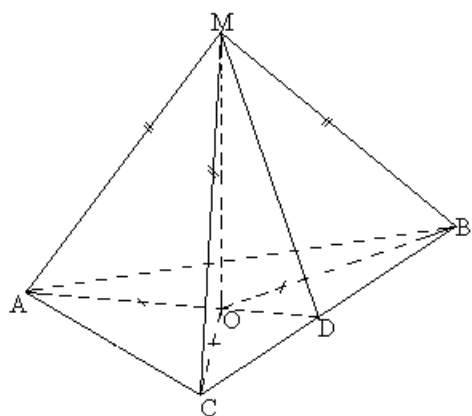
P_{EFGH} -?

Рис.П.1.5



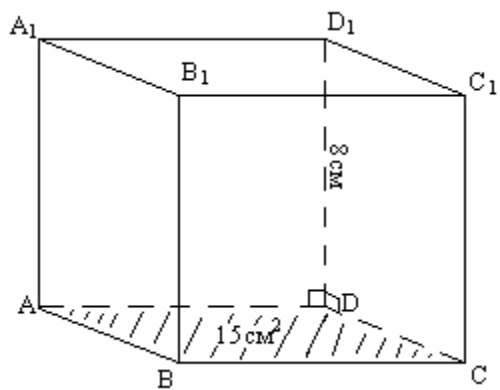
Доказать: $AMC \perp BMD$.

Рис.П.1.6



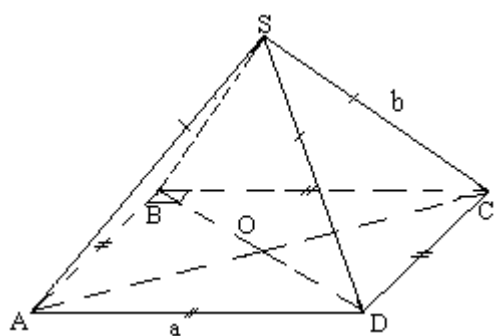
Доказать: $ABCD \perp AMD$.

Рис.П.1.7



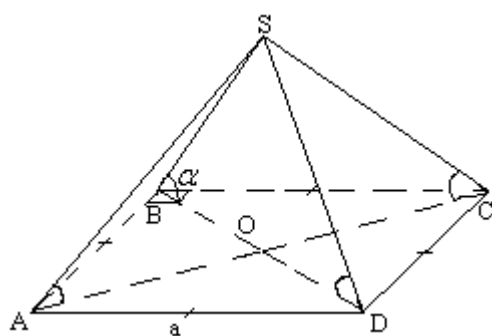
$V_{ABCD A_1B_1C_1D_1} = ?$

Рис.П.1.8.



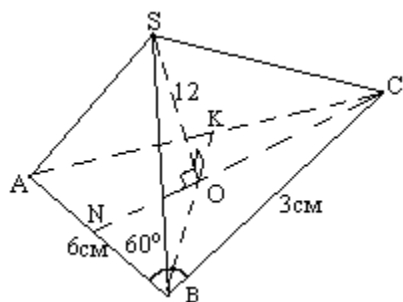
$V_{SABCD} = ?$

Рис.П.1.9.



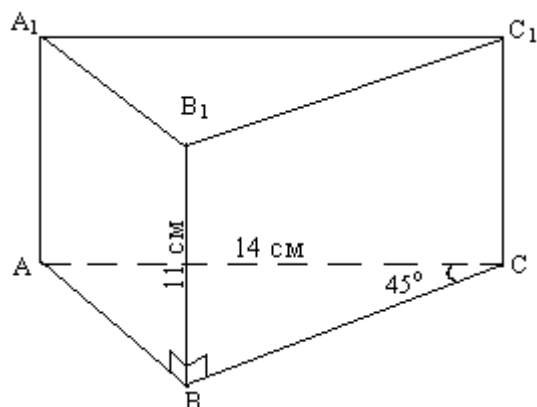
$V_{SABCD} = ?$

Рис.П.1.10.



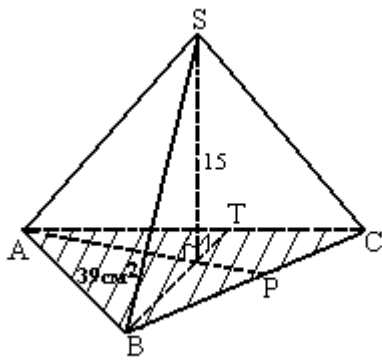
$V_{SABC} = ?$

Рис.П.1.11.



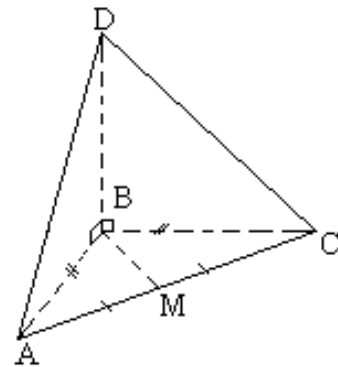
$V_{ABC A_1B_1C_1} = ?$

Рис.П.1.12



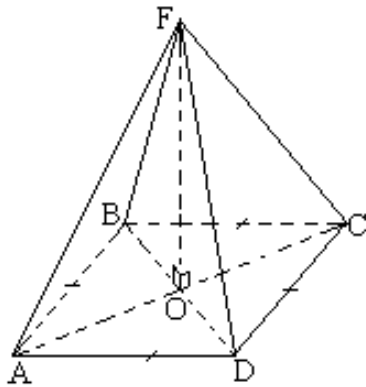
$V_{SABC} = ?$

Рис. П.1.13.



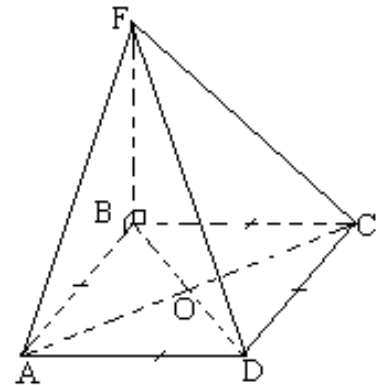
Доказать: 1) $BD \perp (ABC)$
2) $AC \perp (BMD)$

Рис. П.1.14.



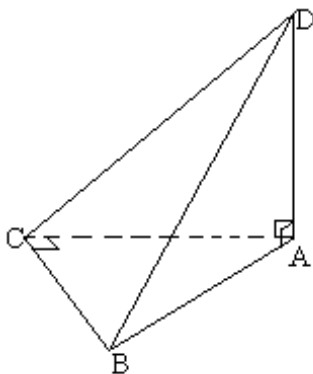
Доказать: 1) $FO \perp (ABC)$
2) $AC \perp (BDF)$

Рис. П.1.15.



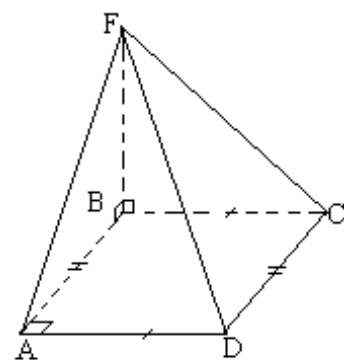
Доказать: 1) $FO \perp (ABC)$
2) $AC \perp (BDF)$

Рис. П.1.16.



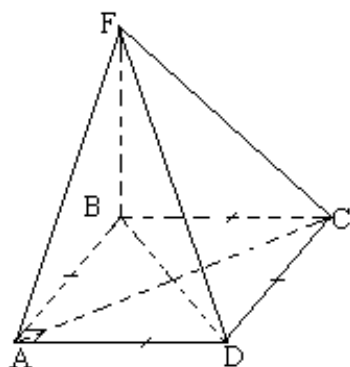
Доказать: 1) $AD \perp (ABC)$
2) $AC \perp (BDF)$

Рис. П.1.17.



Доказать: 1) $FO \perp (ABC)$
2) $AD \perp (ABF)$

Рис. П.1.18.



Доказать: 1) $BF \perp (ABC)$
 2) $AD \perp (ABF)$

Рис. П.1.19.

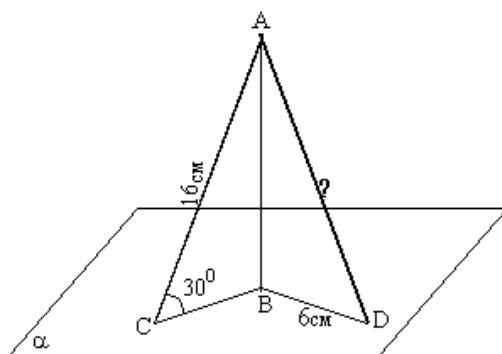


Рис. П.1.20.

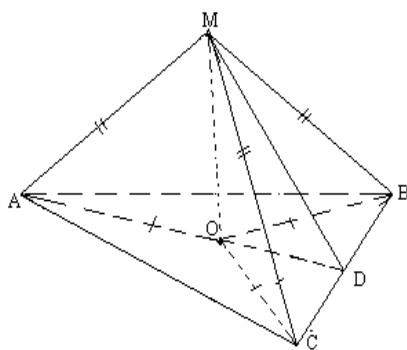
Задачи №2,4,6,5,7 составлены Рабиновичем Е.М.

Задача №3 из учебника по геометрии Погорелова А.В. [34].

Задачи №1,8,9,11, 12,13 составлены автором.

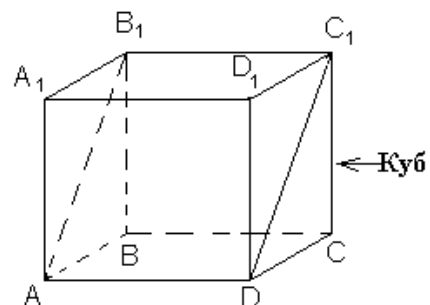
Задачи №14-№18 составлены автором на основе задач сборника Ковалевой Г.И. [23].

II. Задачи, требующие переформирования условия, интерпретации полученного решения.



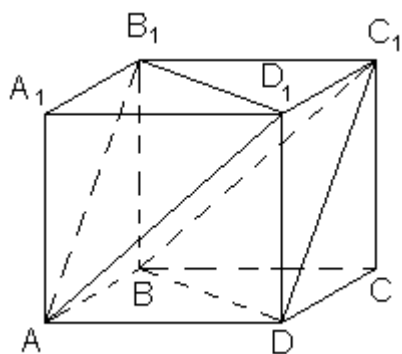
Доказать: $(AMD) \perp (ABC)$.

Рис. П.1.21.



Доказать: AB_1C_1D – квадрат.

Рис. П.1.22.



$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб

Доказать: $(ABC) \perp (A_1 B_1 C_1)$.

Рис. П.1.23.

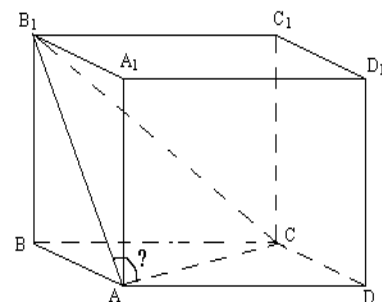


Рис. П.1.24.

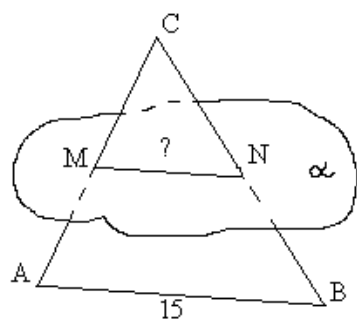


Рис. П.1.25.

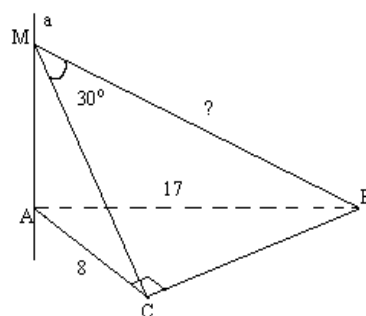
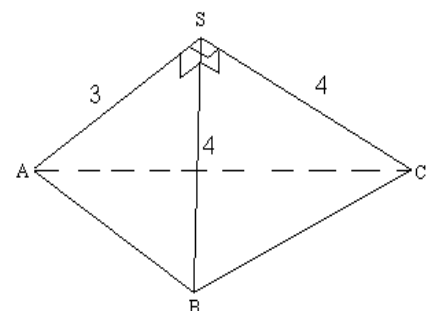
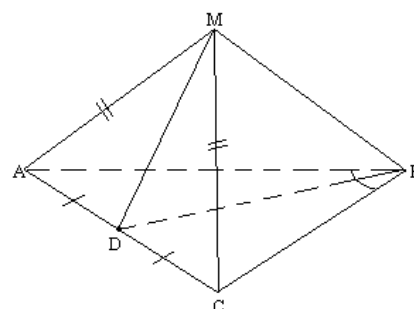


Рис. П.1.26.

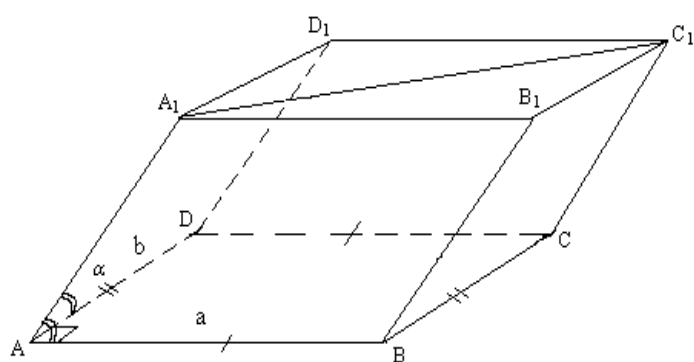


V_{SABC} – ?



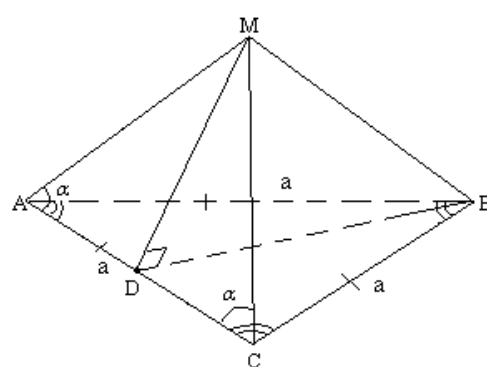
Доказать: $(AMC) \perp (DMD)$.

Рис. П.1.27.



$VABCD A_1B_1C_1D_1$ —?

Рис. П.1.28.



$V MABC$ —?

Рис. П.1.29.

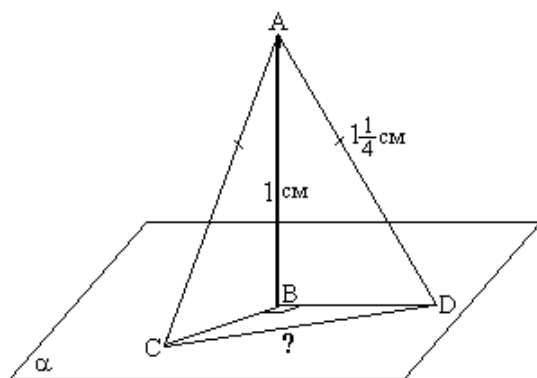


Рис. П.1.31.

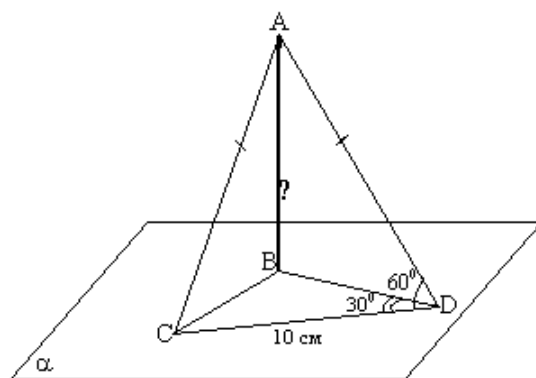


Рис. П.1.32.

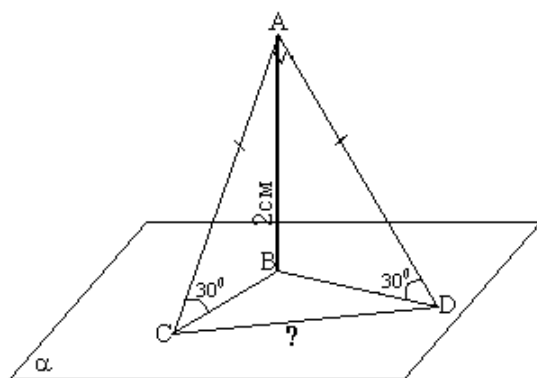


Рис. П.1.33.

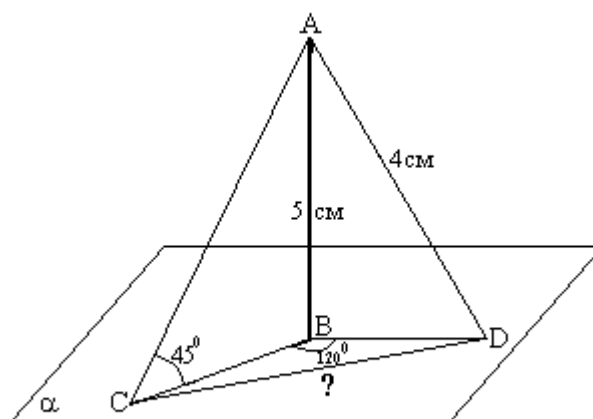
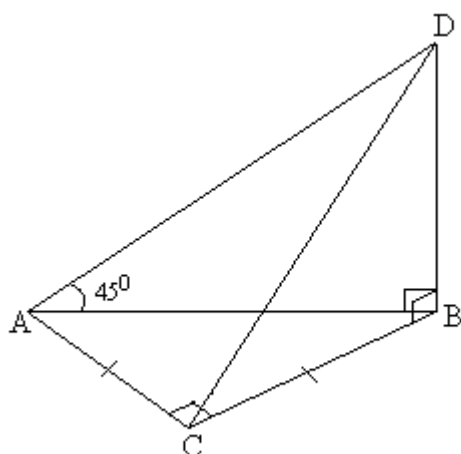
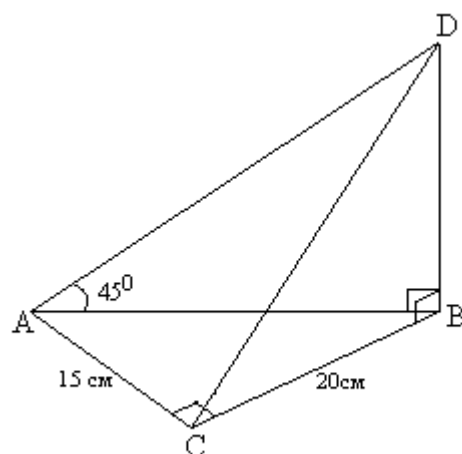


Рис. П.1.34.



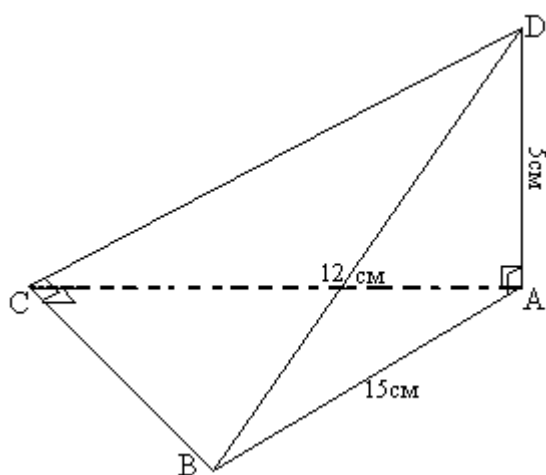
Найти: $\angle CD^{\wedge}(ADB)$

Рис. П.1.35.



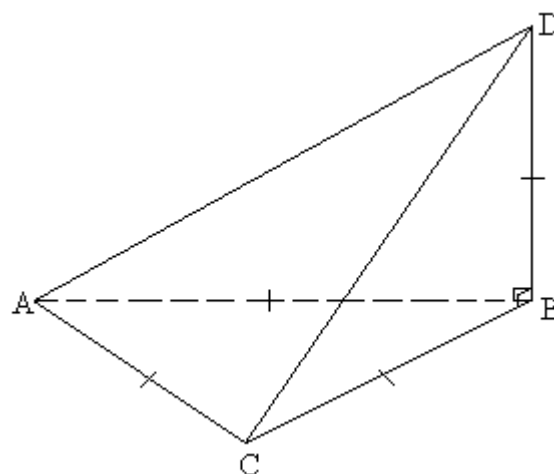
Найти: $\angle CD^{\wedge}(ADB)$

Рис. П.1.36.



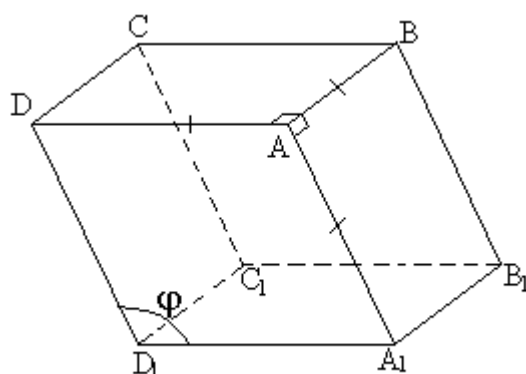
Найти: $\angle BD^{\wedge}(ACB)$

Рис. П.1.37.



Найти: $\angle CD^{\wedge}(ABD)$

Рис. П.1.38.



$V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1} - ?$

Рис. П.1.39.

Задачи №22, №23, №31–39 составлены автором на основе задач из сборника Ковалевой Г.И. [23].

Задачу №28 составил Рабинович Е.М.

Задача №24 составлена автором.

Задачи №25, №26 представлены в пособии [33].

Задача №27 рассматривается в статье О.И. Плакатиной [31].

Задачи №29 и №28 составлены на основе задач Фридмана Л.М [56].

Задача №39 рассмотрена в учебнике по геометрии Александрова А.Д. [1]

III. Недоопределенные задачи.

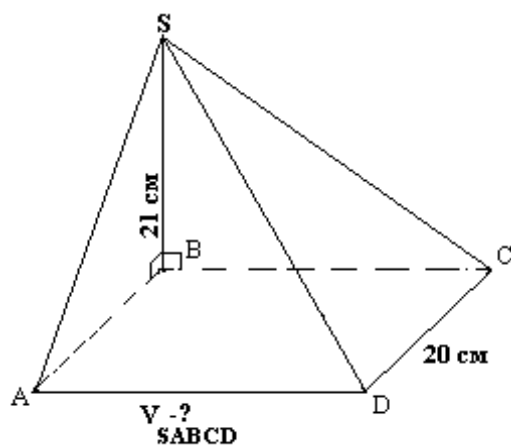


Рис. П.1.40

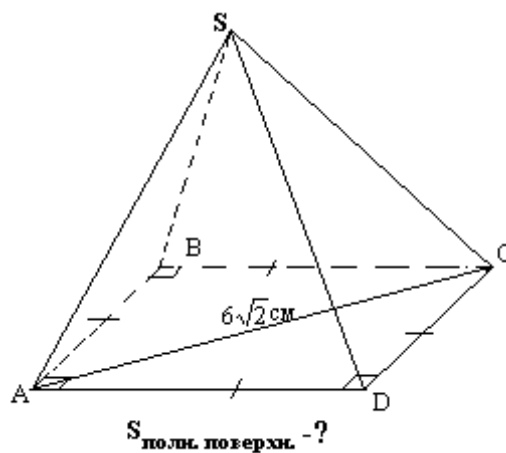


Рис. П.1.41

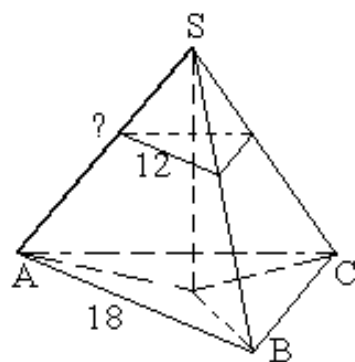


Рис. П.1.42

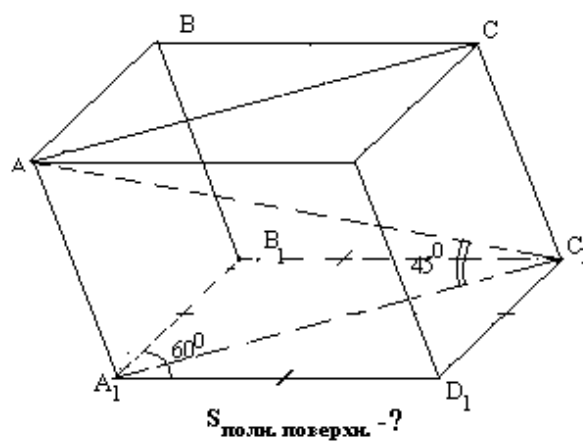


Рис. П.1.43

Все недоопределенные задачи составлены автором кроме задачи №42. Задача №42 составлена на основе сборника Ковалевой Г.И. [23].

III. Переопределенные задачи.

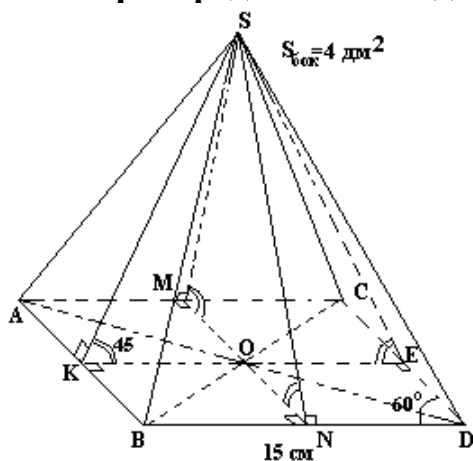


Рис. П.1. 44

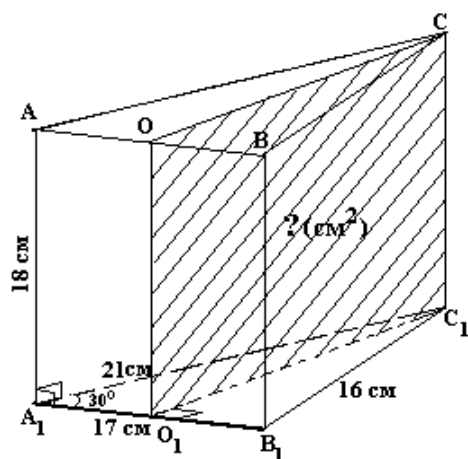
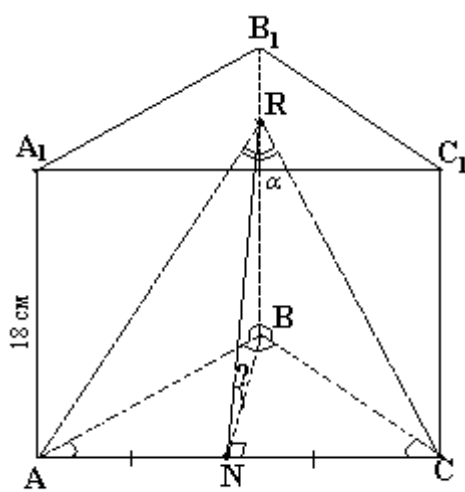


Рис. П.1.45



$\angle R(AC)B - ?$

Рис. П.1. 46

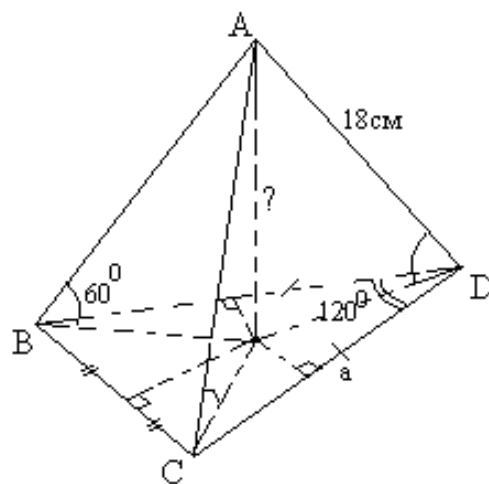
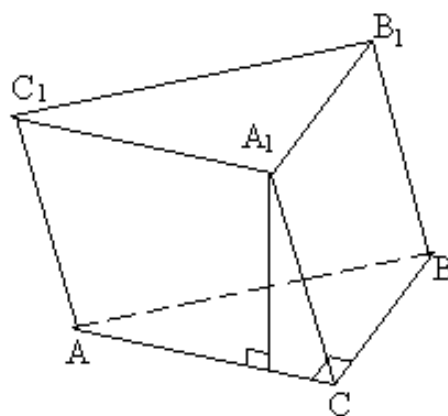


Рис. П.1.47



$(ACC_1) \perp (C_1CB), (AA_1C) \perp (ABC)$

Доказать: CC_1BB_1 – прямоугольник.

Рис. П.1.48

Задачи №47 и №48 составлены на основе сборника Ковалевой Г.И.[23].
Задачи № 44-46 составлены автором.

VI. «Провокационные» задачи.

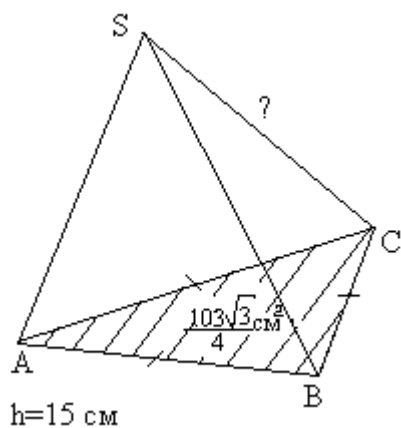


Рис. П.1. 49

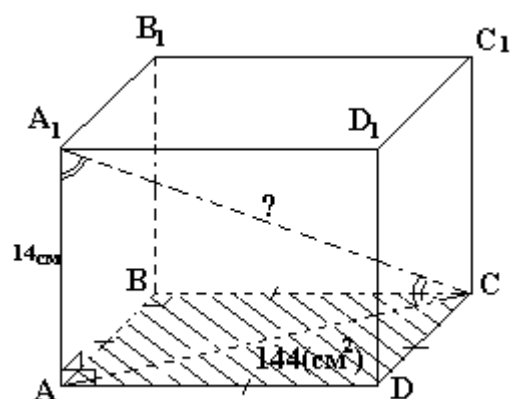
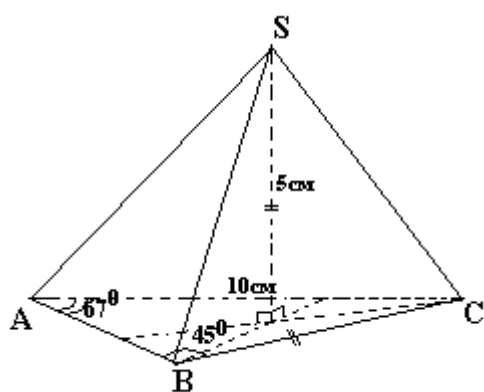
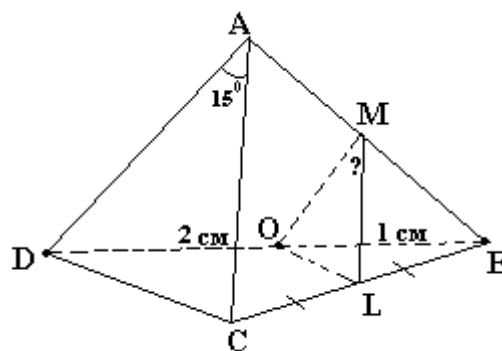


Рис. П.1.50



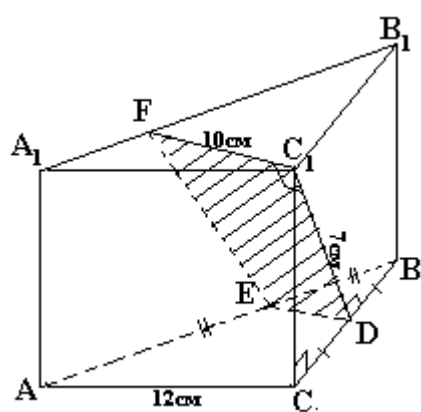
$V_{ABCD}=?$

Рис. П.1.51



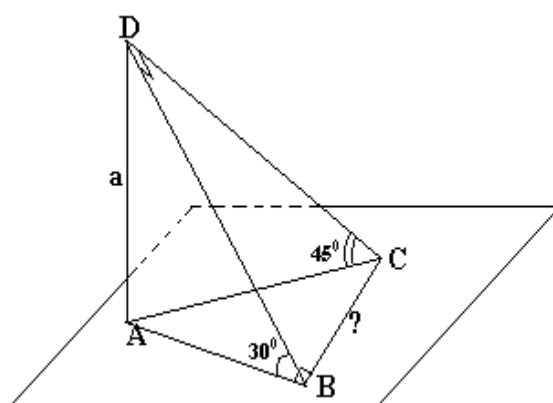
$(ACD \parallel MOL)$

Рис. П.1.52



$S_{FC_1DE}=?$

Рис. П.1. 53



$a \perp (ABC)$

Рис. П.1.54.

Все «провокационные» задачи составлены автором.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Практическое применение задач на готовых чертежах.

На первом этапе предстояло выяснить, на сколько правильно учащиеся владеют навыками чтения чертежей (задание №1), умеют ли учащиеся, используя данные чертежа, выявлять свойства изображенной на нем фигуры (задание №2), достаточно ли у учащихся навыков работы с готовыми чертежами для решения задач на готовых чертежах.

Вариант I.

Вариант II.

1. Выпишите символично условие задачи, используя данные чертежа.

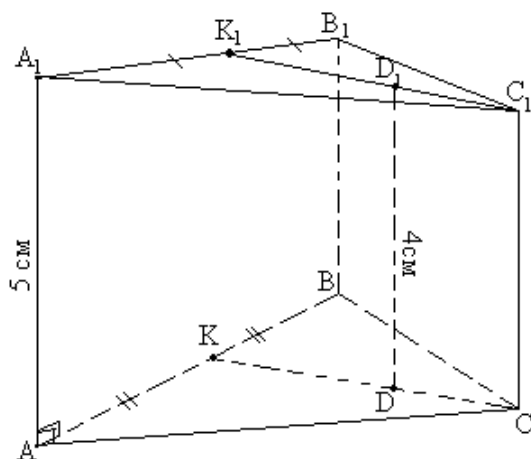


Рис. П.2.1

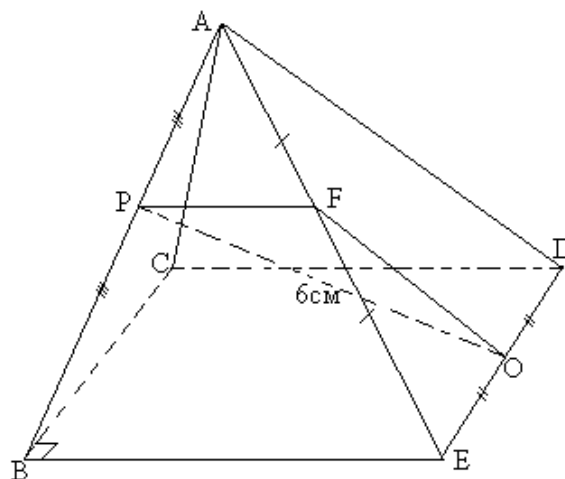


Рис. П.2.2

Задачи составлены автором.

2. Какие свойства фигуры можно получить исходя из данного чертежа?

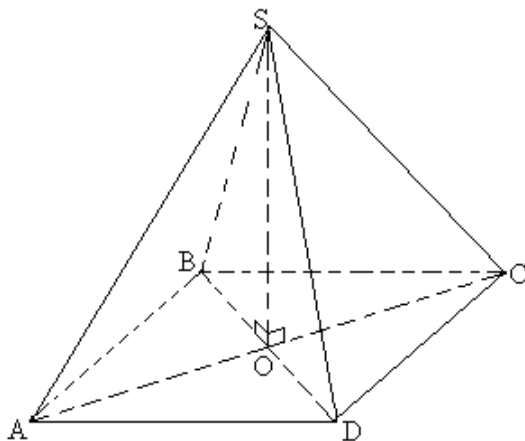


Рис. П.2.3.

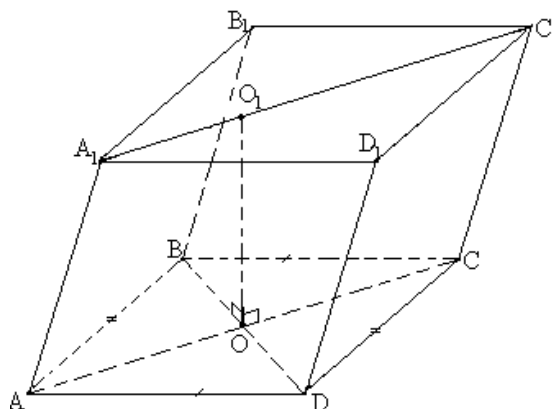
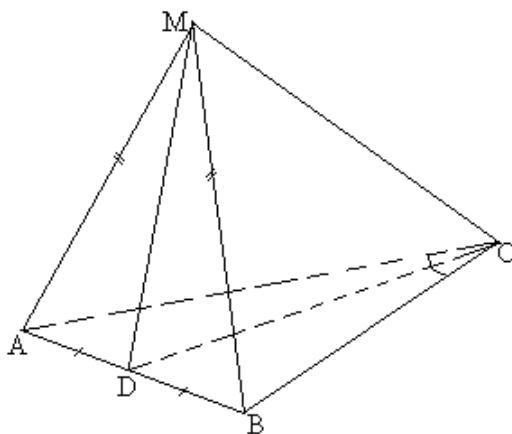


Рис. П.2.4.

3. Выпишите символично условие задачи, используя данные чертежа.

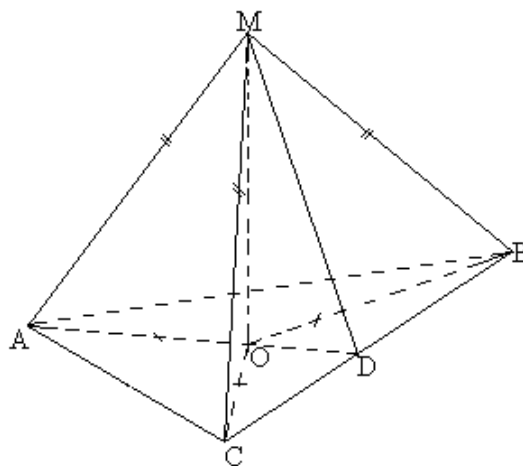
а) какие свойства фигуры следуют из чертежа?

б) Чего достаточно для того, чтобы решить задачу.



Доказать: $AMC \perp BMD$.

Рис. П.2.5.



Доказать: $ABC \perp AMD$

Рис. П.2.6.

Задачи использовались из статьи Рабиновича Е.М. [43], [46].

Предполагаемое решение.

Вариант I.

Решение задания 1.

$ABCA_1B_1C_1$ – многогранник, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $AK=BK$, $A_1K_1=B_1K_1$,

$DD_1=4\text{см}$, $AA_1=5\text{см}$, $AA_1 \perp AB$, $AA_1 \perp AC$.

Решение задания 2.

$SABCD$ – пирамида, SO – высота,

Решение задания 3.

1). $MABC$ – пирамида, $AD=DB$, $AM=MC$, $\angle ABD = \angle CBD$

2). Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник, так как в $\triangle ABC$ AD – медиана и биссектриса.

3). Для того, доказательства перпендикулярности плоскостей $AMC \perp BMD$, достаточно доказать перпендикулярность прямой AC , лежащей в плоскости AMC , к плоскости BMD . А для этого, в свою очередь, достаточно доказать перпендикулярность этой прямой AC к двум

пересекающимся прямым, лежащим в плоскости BMD . Этими прямыми являются MD и BD .

Вариант II.

Решение задания 1.

$CABDE$ – четырехугольная пирамида, $\angle CBE = 90^\circ$, $BP = PA$, $AF = FE$, $EO = OP$, $PO_1 = 6\text{ см}$.

Решение задания 2.

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – многогранник является наклонным параллелепипедом с высотой MM_1 .

Решение задания 3.

- 1). $MABC$ – пирамида, $AM = CM = BM$, $AO = CO = BO$;
- 2). Высотой пирамиды $MABC$ является MO (так как ребра пирамиды равны, следовательно основание высоты есть центр описанной около основания окружности), в основании лежит равносторонний треугольник, следовательно пирамида правильная.
- 3). Для того, доказательства перпендикулярности плоскостей $AMD \perp ABC$, достаточно доказать перпендикулярность прямой BC , лежащей в плоскости ABC , к плоскости AMD . А для этого, в свою очередь, достаточно доказать перпендикулярность этой прямой BC к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости AMD . Этими прямыми являются AD и MD .

При изучении темы «Объемы многогранников» использовался набор задач, порядок которых определялся уровнем сложности.

Вариант I.

В задаче №1 на чертеже указаны площадь основания треугольной пирамиды и длина высоты. Учащимся требовалось для решения задачи определить вид многогранника (треугольная пирамида или пирамида, в основании которой лежит треугольник), воспользоваться определением высоты пирамиды. Так как вне чертежа указано условие перпендикулярности отрезка (SO) основанию (ABC). Без этого условия нельзя говорить, что SO является высо-

той пирамиды. Зная формулу объема пирамиды и подставив значение ученики должны были получить ответ: 24 см^3 .

В задаче №2 из чертежа учащиеся должны вывести, что многогранник – призма, длина ребра которой 8 см, в основании лежит параллелограмм, площадью $15 \text{ (см}^2\text{)}$. Из чертежа видно, что ребро призмы перпендикулярно двум пересекающимся сторонам параллелограмма в основании.

Для нахождения объема призмы необходимо знать формулу $V = S_{\text{осн}} \cdot h$, где, в отличие от предыдущей задачи, не указана высота призмы. Следует использовать для определения высоты признак перпендикулярности прямой к плоскости (если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости, то эта прямая перпендикулярна этой плоскости). Используя этот признак и определение высоты, получаем, что DD_1 – высота, а ее длина известна. Остается подставить численные значения в формулу объема призмы.

{Задача №2 отличается от задачи №1 усложнением одного действия: нахождение высоты призмы (нужно определить высоту)}.

В задаче №3 из чертежа ученики должны вывести, что многогранник – треугольная пирамида (пирамида, в основании которой лежит треугольник). На чертеже не показано, чему равна площадь основания пирамиды, высота (это необходимые компоненты для нахождения объема пирамиды $SABC$). Учащимся предстоит используя данные чертежа, вычислить площадь треугольника ABC , определить высоту пирамиды (или доказать, что SO – высота пирамиды). Для нахождения площади треугольника ABC учащиеся должны использовать данные чертежа: $BC=3\text{ см}$, $AB=6\text{ см}$, $\angle ABC=60^\circ$. Используя формулу площади $\triangle ABC$ $S = 1/2 \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$, учащиеся должны получить следующий результат: площадь равна $\frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ (см}^2\text{)}$.

Для доказательства того, что SO – высота, нужно использовать признак перпендикулярности прямой к плоскости (учащиеся должны учесть на чертеже, что $SO \perp CN$). Используя эти данные и признак перпендикулярности прямой к плоскости, выводят,

что SO – высота. Длина высоты известна, 12 см. Затем, подставляя числовые значения, можно получить объем.

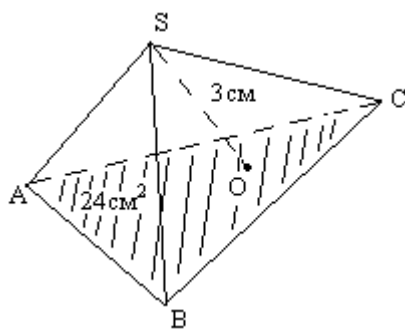
Эта задача усложняется от предыдущей тем, что помимо того, что нужно (найти) определить высоту, если требуется вычислить площадь треугольника.

Задача №4 не отличается по требованию от (других) предыдущих, но главным отличием является то, что учащимся для нахождения объема нужно определить, какой отрезок является высотой пирамиды (достраивание «высоты» на чертеже). Особого труда по нахождению площади основания нет. Из чертежа видно равенство сторон параллелограмма и один угол прямой. Используя определение квадрата получают ученики, что на чертеже дана пирамида, в основании которой квадрат, длина сторон которого равна a . (Правильная пирамида). Зная свойство правильной пирамиды (основание высоты – центр квадрата, пересечение диагоналей). Учащимся нетрудно будет определить и построить высоту (SO – высота).

Для вычисления длины высоты пирамиды необходимо использовать данные чертежа: угол наклона ребра пирамиды $-\alpha$, вычисление длины диагоналей. Используя определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника, ученики должны вычислить длину высоты SO .

По итогам проверки оказалось, что учащиеся 11 класса, плохо владеют работой по решению задач на готовых чертежах. Многие учащиеся первого варианта считают, что на чертеже задачи №1 изображена правильная призма а DD_1 – высота, ссылаясь только на картинку. Некоторые учащиеся второго варианта считают, что в основании пирамиды Задача №1 лежит квадрат. В целом лишь пять человек из восемнадцати выполнили правильно все задания, составили краткую запись условия по чертежу.

Вариант I.
Задача №1.

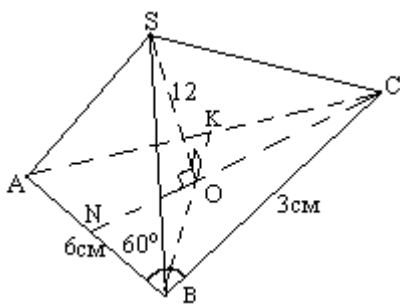


$SO \perp (ABC)$

$V_{SABC} = ?$

Рис. П.2.7.

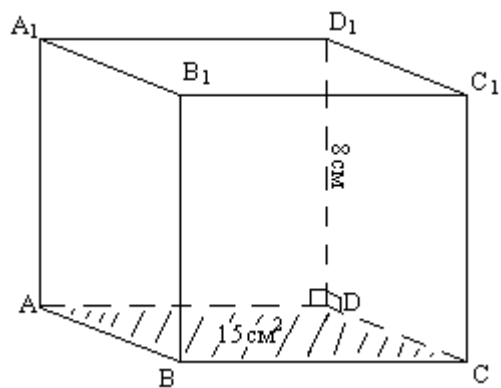
Задача №3.



$V_{SABC} = ?$

Рис. П.2.9

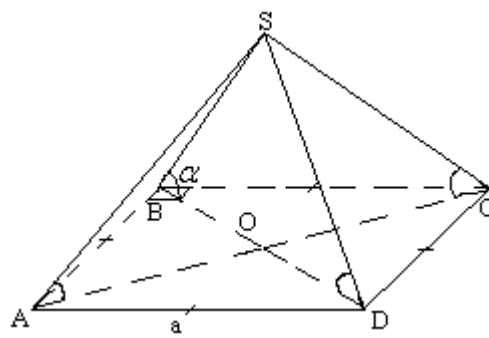
Задача №2.



$V_{ABCD A1B1C1D1} = ?$

Рис. П.2.8.

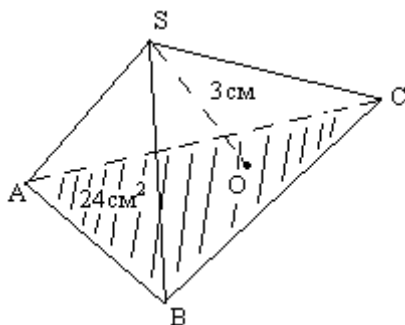
Задача №4



$V_{SABCD} = ?$

Рис. П.2.10.

Предполагаемое решение задач учениками:
Задача №1.



Дано: SABCD – треугольная пирамида.

$SO \perp (ABC)$, $SO = 3 \text{ см}$, $S_{ABC} = 24 (\text{см}^2)$.

Найти: V_{SABCD} .

$SO \perp (ABC)$

Решение:

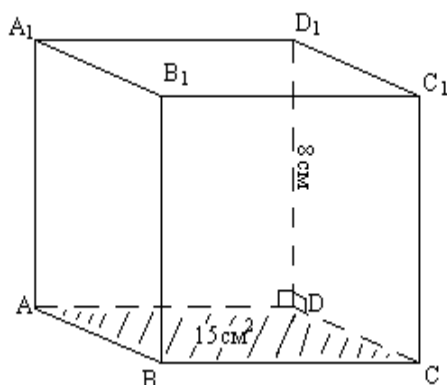
$$1. V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{Ocn} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot h$$

2. $SO \perp (ABC)$ (по условию) $\Rightarrow$ SO – высота (по определению).

$$3. V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 24 = 24 (\text{см}^3)$$

Ответ: 24 (см^3).

Задача №2.



Дано: ABCD A₁B₁C₁D₁ – призма.

$S_{ABCD} = 15 (\text{см}^2)$, $DD_1 \perp DC$, $DD_1 \perp AD$,

$DD_1 = 8 \text{ см}$.

Найти: $V_{ABCD A_1B_1C_1D_1}$.

Решение:

$$1. V_{ABCD A_1B_1C_1D_1} = S_{Ocn} \cdot h$$

2. $S_{Ocn} = 15 (\text{см}^2)$ (по условию), $h = ?$

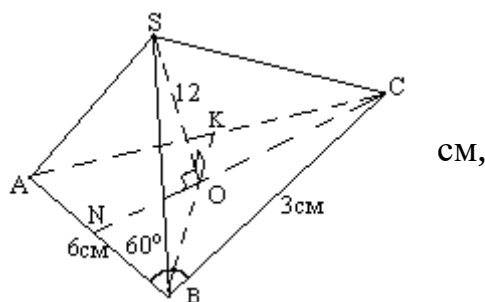
3. $DD_1 \perp DC$, $DD_1 \perp AD$ (по условию) $\Rightarrow DD_1 \perp (ABC)$ (по признаку перпендикулярности прямой к плоскости) $\Rightarrow DD_1$ – высота (по определению).

$$4. V_{ABCD A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} \cdot DD_1 = 15 \cdot 8 = 120 (\text{см}^3)$$

Ответ: 120 (см^3).

Задачи составлялись автором.

Задача №3



Дано: SABCD – пирамида.

$SO \perp CN$, $SO \perp BK$, $CN \cap BK = \{O\}$, $SO = 12$

см,

$\angle ABC = 60^\circ$, $AB = 6$ см, $BC = 3$ см.

Найти: V_{SABCD} .

Решение:

$$1. \quad V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{OCH} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot h, \quad S_{OCH} - ? \quad h - ?$$

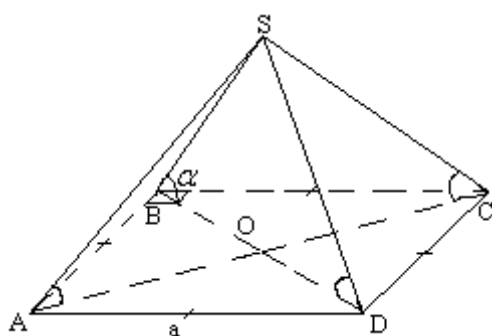
$$2. \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2} (\text{см}^2);$$

3. $SO \perp CN$, $SO \perp BK$ (по условию) $\Rightarrow SO \perp (ABC)$ (по признаку перпендикулярности прямой к плоскости) $\Rightarrow SO$ – высота (по определению).

$$4. \quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot 12 = 18\sqrt{3} (\text{см}^3).$$

Ответ: $18\sqrt{3}$ (см³).

Задача №4



Дано: SABCD – пирамида.

$AB = BC = CD = a$

$\angle ADC = 90^\circ$,

$\angle SBD = \angle SCA = \angle SAC = \angle SDB = \alpha$,

Найти: V_{SABCD} .

Решение:

$$1. \quad V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{OCH} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot h, \quad S_{OCH} - ? \quad h - ?$$

2. $AB = BC = CD = a$, $\angle ADC = 90^\circ$ (по условию) $\Rightarrow ABCD$ – квадрат (по определению) $\Rightarrow S_{OCH} = a^2$;

3. $ABCD$ – квадрат $\Rightarrow SABCD$ – правильная пирамида (по определению) $\Rightarrow SO$ – высота (по свойству правильной пирамиды) $\Rightarrow SO \perp (ABC)$ (по свойству высоты).

4. $\angle SBD = \angle SDB = \alpha$ (по условию) $\Rightarrow \triangle SBD$ – равнобедренный (по определению), $SO \perp BD$ (по свойству прямой перпендикулярной к плоскости).

$$5. BD = a\sqrt{2} \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$6. \cos \alpha = \frac{BO}{SO} \Rightarrow SO = \frac{BO}{\cos \alpha} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \alpha$$

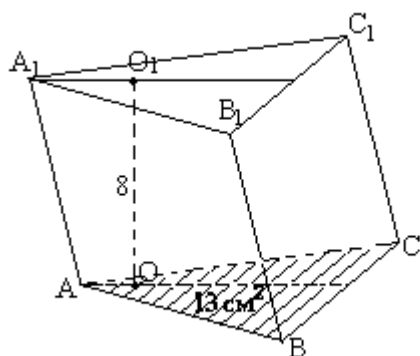
$$7. V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{осн} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} (\text{см}^3)$$

Ответ: $\frac{a^3 \sqrt{2}}{6} (\text{см}^3)$.

Задачи Варианта II аналогично отличаются друг от друга возрастанием сложности действий при решении.

Задачи составлялись автором.

Задача №1.

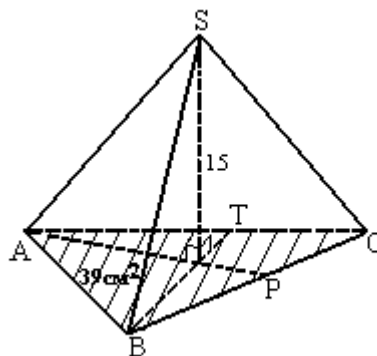


$$OO_1 \perp (ABC)$$

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = ?$$

Рис. П.2.11.

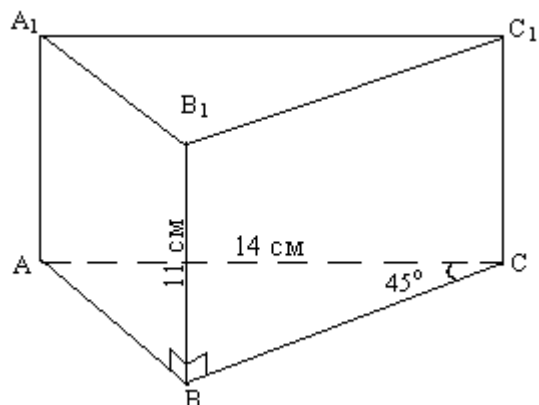
Задача №2.



$$V_{SABC} = ?$$

Рис. П.2.12.

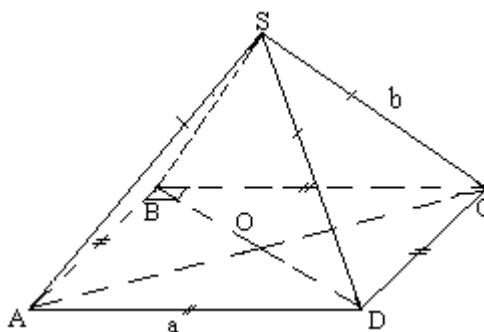
Задача №3.



$$V_{ABCA_1B_1C_1} = ?$$

Рис. П.2.13.

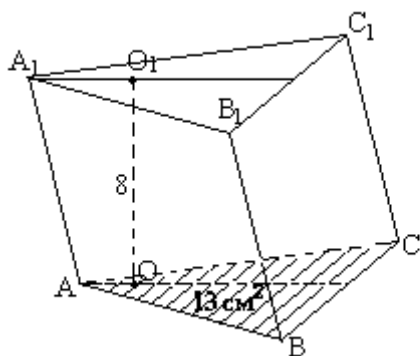
Задача №4.



$$V_{SABCD} = ?$$

Рис. П.2.14.

Предполагаемое решение задач учениками:
Задача №1.



Дано: $ABCD A_1B_1C_1D_1$ – наклонная призма.

$OO_1 \perp (ABC)$, $S_{ABC} = 13 \text{ (см}^2\text{)}$, $OO_1 = 8 \text{ см}$.

Найти: $V_{ABCD A_1B_1C_1D_1}$.

Решение:

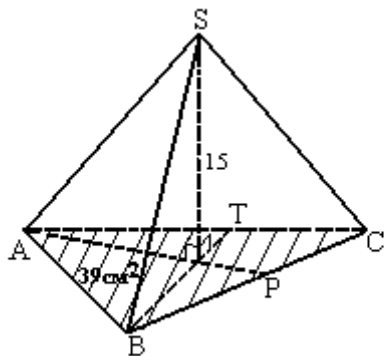
$$1. V_{ABCD A_1B_1C_1D_1} = S_{Och} \cdot h, S_{Och} - ? h - ?$$

$$2. OO_1 \perp (ABC) \text{ (по условию)} \Rightarrow OO_1 - \text{высота (по определению)}$$

$$\Rightarrow V = 13 \cdot 8 = 104 \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: $104 \text{ (см}^3\text{)}$.

Задача №2.



Дано: $SABCD$ – пирамида.

$SO = 15 \text{ см}$, $SO \perp BT$, $SO \perp AP$,
 $S_{ABC} = 39 \text{ см}^2$.

Найти: V_{SABC}

Решение:

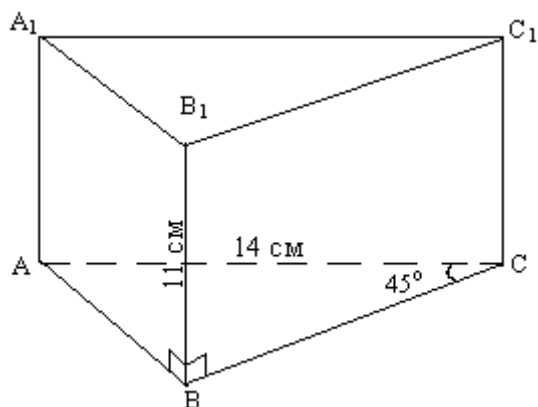
$$1. V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{Och} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot h, S_{Och} = 39 \text{ см}^2 \text{ (по условию)}, h - ?$$

2. $SO \perp BT$, $SO \perp AP$ (по условию) $\Rightarrow SO \perp (ABC)$ (по признаку перпендикулярности прямой к плоскости) $\Rightarrow SO$ – высота (по определению).

$$3. V = \frac{1}{3} \cdot 39 \cdot 15 = 195 \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: $195 \text{ (см}^3\text{)}$.

Задача №3



Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – призма.

$BB_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AB$, $BB_1 = 11$ см,

$\angle ACB = 45^\circ$

Найти: $V_{ABCA_1B_1C_1}$

Решение:

$$1. V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{Och} \cdot h, S_{Och} - ? h - ?$$

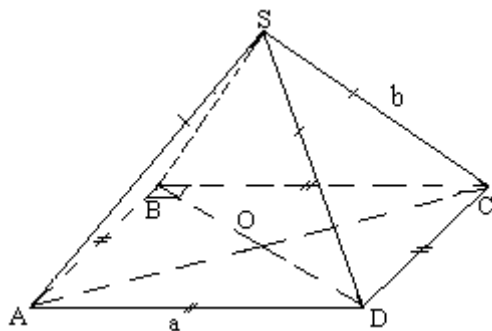
$$2. S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 8 \cdot \sin 45^\circ = 14 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 28\sqrt{2} (\text{см}^2)$$

3. $BB_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AB$ (по условию) $\Rightarrow BB_1 \perp ABC$ (по признаку перпендикулярности прямой к плоскости) $\Rightarrow BB_1$ – высота, $BB_1 = 11$ см (по условию) $\Rightarrow$

$$4. V = S_{ABC} \cdot BB_1 = 28\sqrt{2} \cdot 11 = 308\sqrt{2} (\text{см}^3)$$

Ответ: $308\sqrt{2} (\text{см}^3)$.

Задача №4.



Дано: $SABCD$ – пирамида.

$AB = AC = BC = CD = a$, $\angle BAD = 90^\circ$,

$SA = SB = SC = SD = b$,

Найти: V_{SABCD}

Решение:

$$1. V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{Och} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot h, S_{Och} - ? h - ?$$

2 $\angle BAD = 90^\circ$ (по условию) $\Rightarrow ABCD$ – квадрат (по определению) $\Rightarrow S_{Och} = a^2$;

3. $ABCD$ – квадрат $\Rightarrow SABCD$ – правильная пирамида (по определению) $\Rightarrow SO$ – высота (по свойству правильной пирамиды) $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$ (по свойству высоты).

4. $SA = SB$ (по условию) $\Rightarrow \triangle SBD$ – равнобедренный (по определению), $SO \perp BD$ (по свойству прямой перпендикулярной к плоскости).

$$5. BD = a\sqrt{2} \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ (по свойству диагоналей квадрата)}$$

$$6. SO = \sqrt{b^2 - a^2}$$

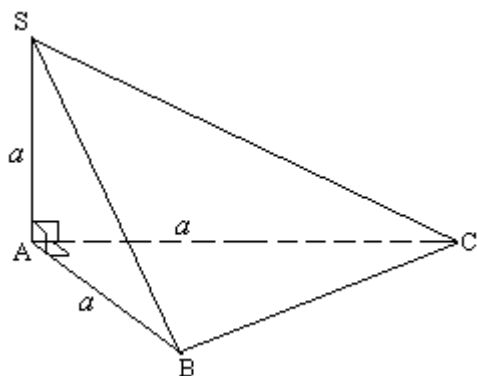
$$7. V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{осн} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{b^2 - a^2} \text{ (см}^3\text{)}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{b^2 - a^2} \text{ (см}^3\text{)}.$$

По итогам проверки работ, выяснилось, что с первыми тремя задачами ученики справились. Затруднения вызвали последние задачи обоих вариантов. После работы с задачами на готовых чертежах, большинство учащихся правильно составляют краткую запись условия задачи по чертежу, но стоит проблема в решении более сложных задач. На это влияют многие аспекты.

Для выяснения того, на сколько учащиеся владеют действием переформулирования условия, изменения структуры задачи использовались следующие задачи:

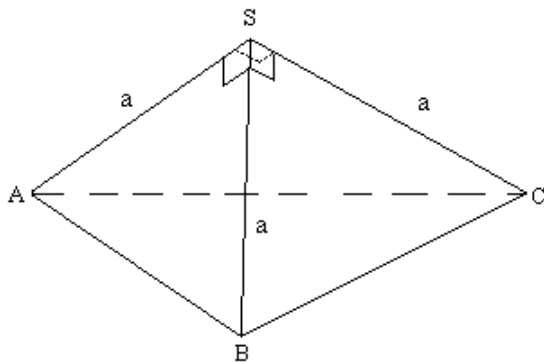
Вариант I.



$V_{ABC}=?$

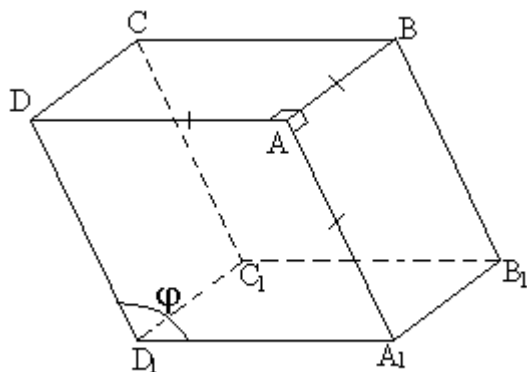
Рис. П.2.15.

Вариант II.



$V_{ABC}=?$

Рис. П.2.16.



$V_{ABCD A_1 B_1 C_1 D_1}=?$

Задачи использовались из учебника геометрии Погорелова А.В. [34] и Александрова А.Д [1].

Также использовались провокационные задачи, составленные автором. После проверки решения которых выяснилось, что с задачами такого типа учащиеся не были знакомы.

Как было сказано, эти задачи являются базой для организации работы по достижению глубокого понимания материала.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Электронное пособие по обучению чтению чертежей.

Как уже было сказано, при решении задачи на готовом чертеже нужно обратить внимание на этап анализа чертежа (чтению чертежа). Для этого и планировалось разработать электронное пособие по обучению чтению чертежей.

При запуске пособия появляется **Титульный лист** кадр№1, содержащий тему учебника и кнопку далее, нажав на которую можно перейти к следующей странице кадр№2. На этой странице автор обращается к учащимся с целью привлечения интереса к данному пособию, а также содержится ссылка на страницу «Информация для учителя» кадр№3. От страницы «Информация для учителя» можно перейти на страницы, где предлагается набор задач на признаки равенства треугольников:

«Задачи на первый признак равенства треугольников» кадр№4

«Задачи на второй признак равенства треугольников» кадр№5

«Задачи на третий признак равенства треугольников» кадр№6.

От страницы, где автор обращается к ученику кадр№2 можно перейти на страницу с рекомендациями по использованию справки о геометрических обозначениях кадр№7, нажав на стрелку. На следующей странице кадр№8 автор дает рекомендации по использованию справки о символических обозначениях. После ученик переходит на страницу кадр№9, где представлено предписание по чтению чертежей. Нажав на кнопку, можно перейти на страницу кадр№10, где описываются ссылки, необходимые для дальнейшей работы. Далее на странице кадр №11 дается задача на готовом чертеже. Нажимая на ссылку, размещенную под чертежом, начинает мигать его определенная часть. Работая с этой ссылкой постепенно в соответствии с анимационным процессом, составляется краткая запись условия задачи. А на странице кадр№12 нажав на ссылку «Формулировка задачи» можно получить сформулированную по составленной записи задачу кадр№13. Нажав на стрелку этой же страницы, можно перейти к следующей странице, где дана задача №2

кадр№14. По аналогичному принципу можно получить краткую запись условия задачи по чертежу, но сформулировать задачу по составленной краткой записи предоставляется учащимся кадр№15. На странице «Задача3» чертеж кадр№16, где работа ведется аналогичным способом, как и с предыдущими задачами, но условие предоставляется не полностью, учащимся нужно подумать, как записать символично недостающие элементы кадр№17. Также предлагается сформулировать задачу по составленной краткой записи. При работе с задачами на каждой странице находятся ссылки «Геометрические обозначения», «Символьные обозначения», где учащиеся могут посмотреть, как обозначается тот или иной элемент. На последней странице автор завершает обучение кадр№18.

Кадр№1.

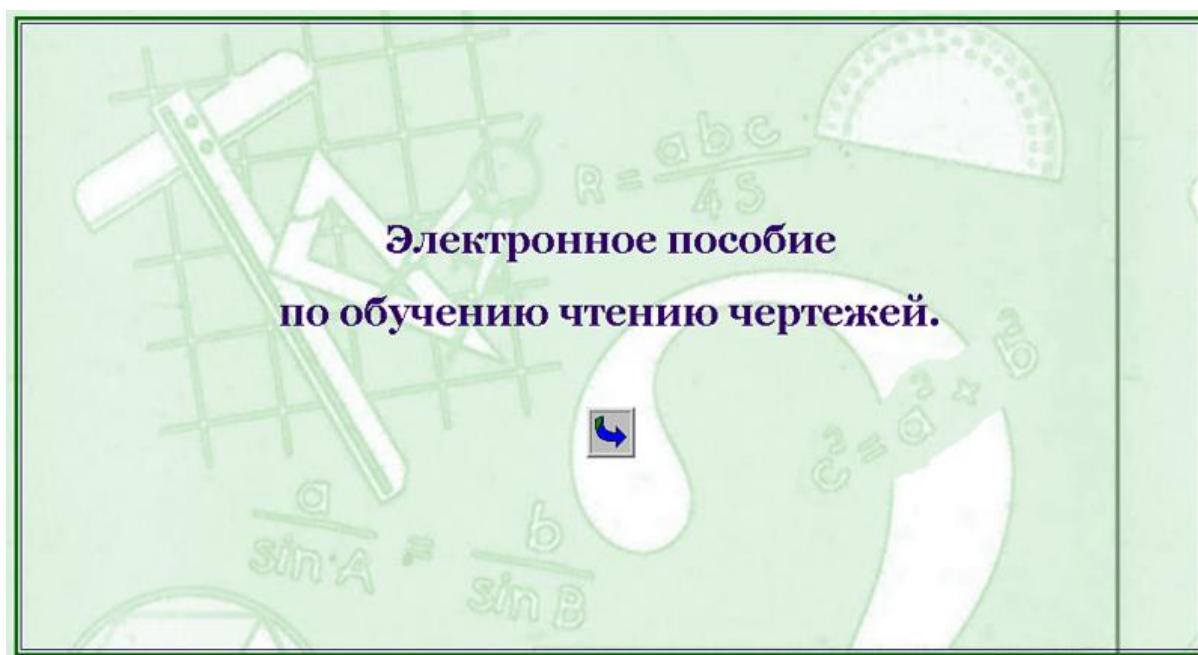


Рис. П.3.1.

Кадр №2.

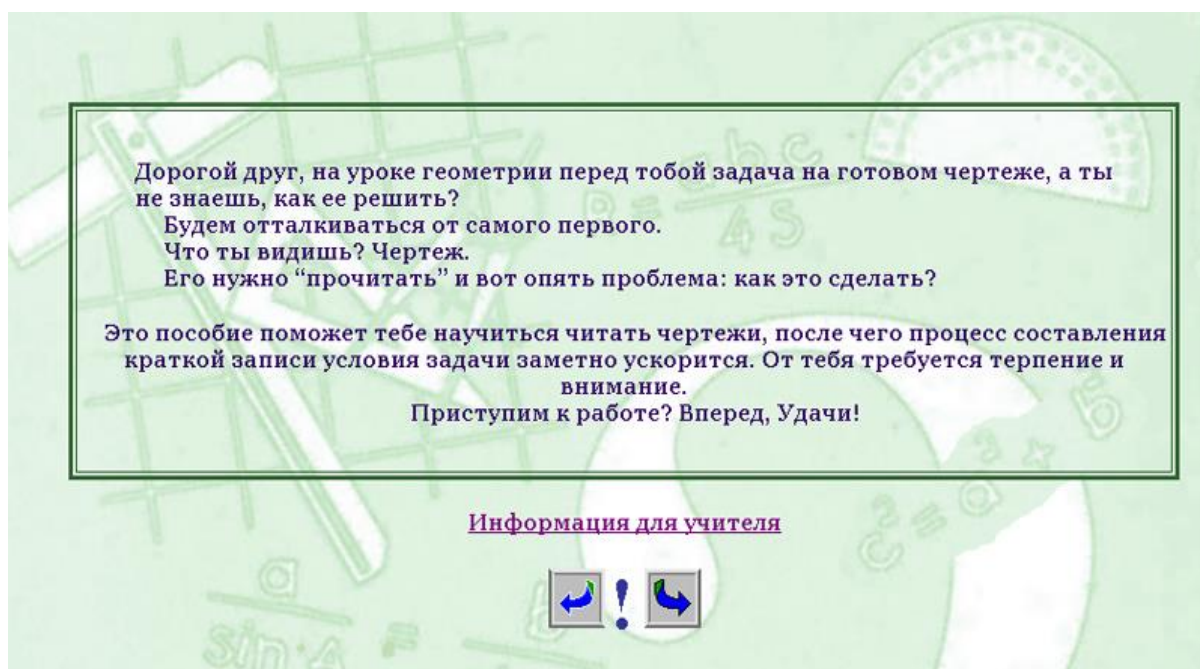


Рис. П.3.2.

Кадр №3.

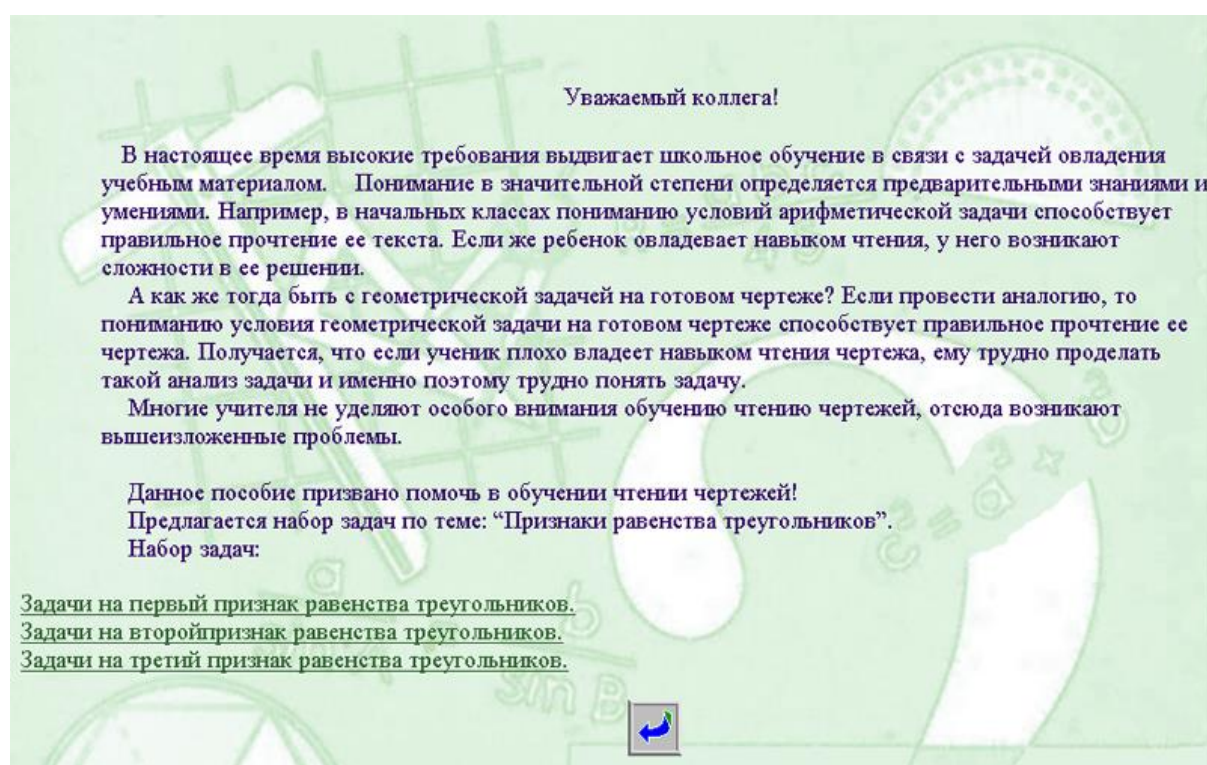


Рис. П.3.3.

Кадр №4.



Рис. П.3.4.

109



Рис. П.3.6.

Кадр№7

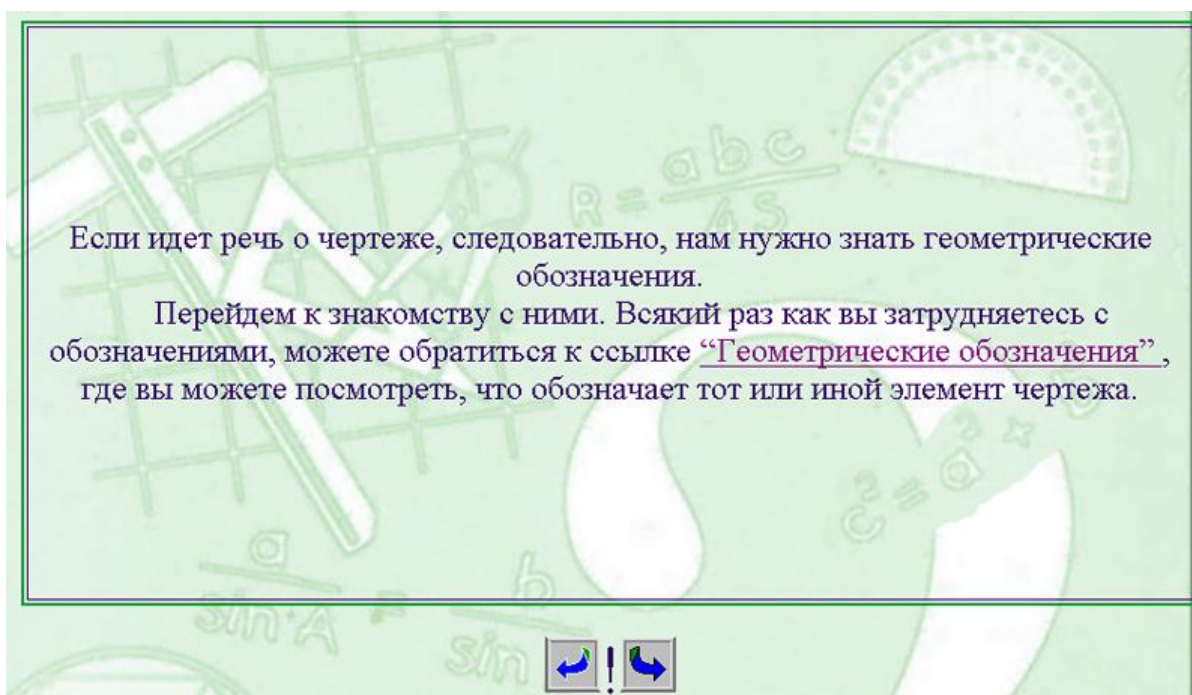


Рис. П.3.7.

Кадр№8.

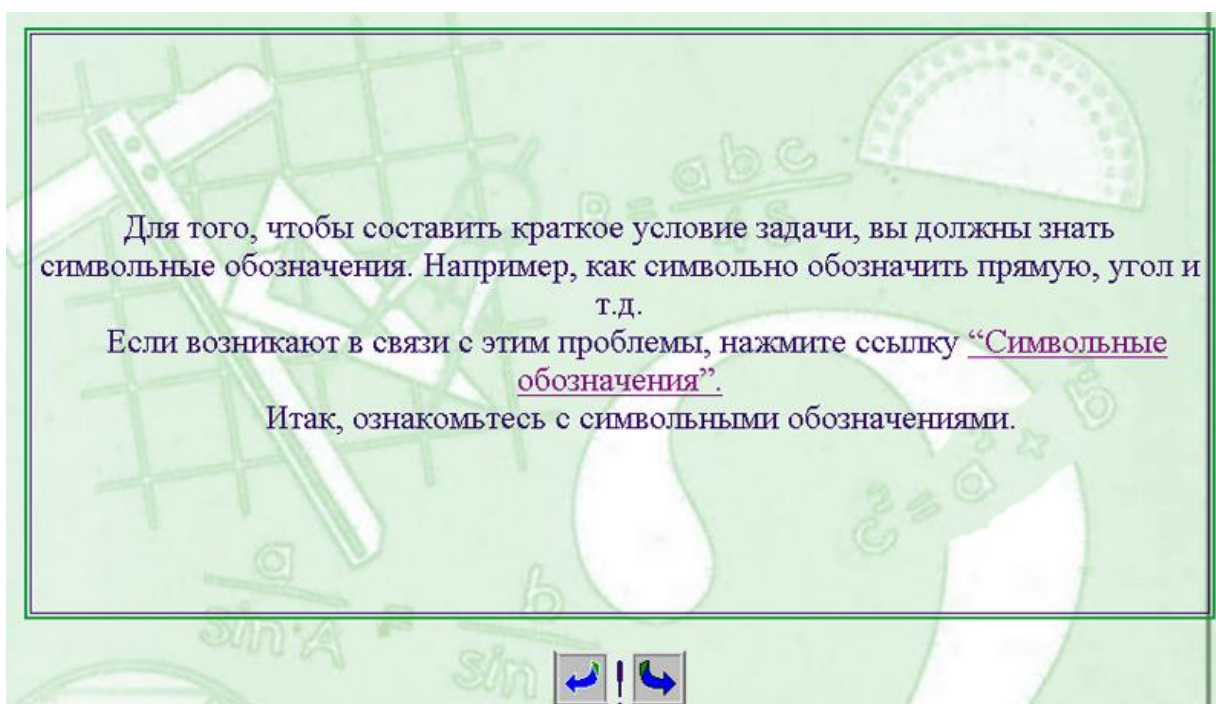


Рис. П.3.8.

Приступим к чтению чертежей. С чего же начать, вы спросите.

- 1) Рассмотрите чертеж и выделите ту фигуру, которая изображена (может быть и вариант, где на чертеже не одна фигура). Запишите символично в условие задачи.
- 2) Посмотрите, есть ли равные элементы фигуры (равенство отрезков, углов и т.п.).
- 3) Уделите внимание тем элементам, которые находятся в отношении (перпендикулярность, параллельность, пересечение, принадлежность и т.п.). Запишите в условие задачи.
- 4) Выделите те элементы фигуры, которые имеют численное значение (длина, площадь, объем и т.п.).
- 5) Выпишите раздел “найти” символично то элемент, который обозначен (? , X), или обратите внимание на записи вне чертежа, что требуется найти.
- 6) Прочтите в слух по составленной краткой записи задачу.



Рис. П.3.9.

Вам будут предложены задачи.

Для чтения чертежей вам поможет ссылка [Нажми!](#). Всякий раз, когда вы будете нажимать на нее, некоторая часть чертежа будет выделена, а после второго нажатия, в условии появится символическое обозначение.

Для того, чтобы просмотреть формулировку задачи, нажмите ссылку [Формулировка задачи!](#)

Не забывайте пользоваться справочным материалом.

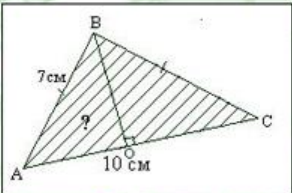


Рис. П.3.10.

Кадр №11

Начало Геометрические обозначения Символьные обозначения.

Задача1.



Дано:

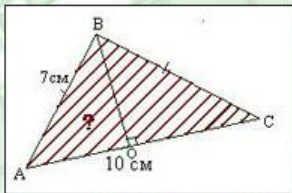
 Нажми!

Рис. П.3.11.

Кадр №12

Начало Геометрические обозначения Символьные обозначения.

Задача1.



Дано: $\triangle ABC$, $AB=BC$,
 $AC \perp BO$, $AB=7$ см,
 $AC=10$ см.

Найти: S_{ABC}

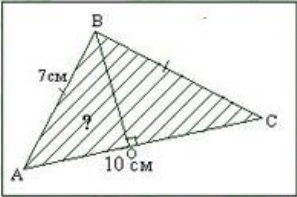
 Формулировка задачи!

Рис. П.3.12.

Кадр №13

Начало Геометрические обозначения Символьные обозначения.

Задача1.



Дано: $\triangle ABC$, $AB=BC$,
 $AC \perp BO$, $AB=7$ см,
 $AC=10$ см.

Найти: S_{ABC}

Основание равнобедренного треугольника равно 10 см, а длина боковых сторон равна 7 см, BO -высота, проведенная к основанию. Найдите площадь этого треугольника.

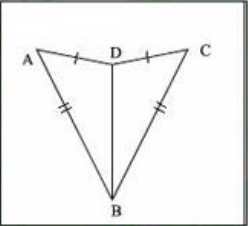


Рис. П.3.13.

Кадр №14

Начало Геометрические обозначения Символьные обозначения.

Задача2.



Дано:

Доказать:
 $\triangle ABD = \triangle BDC$

 Нажми!

Рис. П.3.14.

Кадр №15

Начало Геометрические обозначения Символьные обозначения.

Задача2.

Дано: $\triangle ABD, \triangle BDC$,
 $AD=DC, AB=BC$,

Доказать:
 $\triangle ABD = \triangle BDC$

Сформулируйте задачу, используя составленную краткую запись!



Рис. П.3.15.

Кадр №16

Начало Геометрические обозначения Символьные обозначения.

Задача3.

Дано:

Доказать:
 $\triangle ABC = \triangle DEF$

 Нажми!

Рис. П.3.16.

Кадр №17.

Начало Геометрические обозначения Символьные обозначения.

Задача3.

Дано: $\triangle ABC, \triangle EDF,$
 $\angle BCA = \angle DFE,$
 $\angle ABC = \angle EDF,$
?

Доказать:
 $\triangle ABC = \triangle DEF$

Подумайте, что нужно написать в условии задачи.

 **Формулировка задачи!**

Рис. П.3.17.

Кадр №18.

Думаю, что вам понравилось работать с этим пособием
и эта работа пошла вам на пользу.

Успехов в решении задач на готовых чертежах!



Рис. П.3.18.